TÓPICOS DA MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE - BOHM

José Maria Filardo Bassalo
Paulo de Tarso Santos Alencar
Mauro Sérgio Dorsa Cattani
Antonio Boulhosa Nassar

À memória dos físicos que desenvolveram a
Mecânica Quântica tratada neste livro:

Louis Victor Pierre Raymond de Broglie
David Bohm

PREFÁCIO

Apresentamos neste Livro a aplicação da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$) a alguns problemas da Física. Ele está dividido em 8 Capítulos e 1 Apêndice.

No Capítulo 1, estudamos a $MQBB$ em seu caráter *não-relativista* para sistemas físicos sob a ação de um potencial geral $V(x,\ t)$, e tratados pela **equação de Schrödinger** em seus dois aspectos: linear e não-linear. Aplicamos a essa equação a **transformação de Madelung-Bohm** e a transformamos em duas equações correspondentes às da Dinâmica dos Fluidos e, com elas, demonstramos as Leis de Conservação do Momento Linear e da Energia para os sistemas físicos considerados. Essas Leis são escritas em termos de dois novos conceitos físicos: a **velocidade quântica** e o **potencial quântico**, conceitos esses inerentes à $MQBB$.

Esses conceitos físicos e os teoremas relacionados a eles permitem encontrar os resultados relevantes do Capítulo 1: o estudo da **coerência** ou **descoerência** da evolução dos sistemas físicos, e, também, se eles são **conservativos** ou **não-conservativos**, sendo que, neste último caso, verificamos se são **dissipativos** ou **não-dissipativos**.

No Capítulo 2, usamos a $MQBB$ para estudar os **invariantes de Ermakov-Lewis** ($IE-L$) dos sistemas tratados no Capítulo 1, no caso particular do potencial do Oscilador Harmônico Dependente do Tempo ($OHDT$). Desse modo, verificamos que os sistemas físicos representados pelas equações de **Schrödinger**, de **Bateman-Caldirola-Kanai**, de **Schuch-Chung-Hartman** e de **Hasse** apresentam $IE-L$. Contudo, os sistemas descritos pelas equações de **Bialynicki-Birula-Mycielski**, de **Kostin**, de **Albrecht-Kostin-Nassar** e de **Diósi-Halliwell** não apresentam $IE-L$.

No Capítulo 3, estudamos a evolução temporal do **pacote de onda** associado a uma partícula livre, usando o formalismo

da Mecânica Quântica de Schrödinger (MQS) e o formalismo da $MQBB$; para este, utilizamos a técnica do $IE - L$ desenvolvida no Capítulo 2. Comparando-se os dois resultados, verificamos que, embora os **propagadores de Feynman** sejam idênticos nos dois formalismos, o mesmo não acontece com o pacote de onda; este se espraia mais lentamente no formalismo da MQS do que no da $MQBB$. Este resultado sugere uma possível experiência para a comprovação existencial do **potencial quântico de Bohm**.

No Capítulo 4, usamos a $MQBB$ e a técnica do $IE - L$ para calcular o **propagador de Feynman** para três sistemas físicos: Partícula Livre, Oscilador Harmônico Simples, e Partícula Livre em um Campo Externo Linear. Nossos resultados são idênticos aos encontrados por R. P. Feynman e A. R. Hibbs, em seu famoso livro: **Quantum Mechanics and Path Integrals**, McGraw-Hill Book Company, 1965.

No Capítulo 5, tratamos do **tunelamento quântico** de uma partícula livre em regiões não-dissipativa e dissipativa, usando os dois formalismos: MQS e $MQBB$. No primeiro caso, observamos uma perfeita identidade da expressão que representa o **coeficiente de transmissão**. No caso do tunelamento através de uma barreira com borda aguçada ("sharp-edged") numa região dissipativa e descrita pela **equação de Kostin**, a $MQBB$ mostra que aquele coeficiente diminui.

Registre-se que, neste Capítulo 5, há aspectos novos no tratamento quântico do tunelamento a serem destacados. Enquanto no formalismo da MQS, a **função de onda** (ψ) e sua **derivada espacial** ($\frac{\partial \psi}{\partial x}$) devem ser contínuas nas fronteiras da barreira de potencial, no formalismo da $MQBB$ essa continuidade é exigida para as densidades de massa, de momento linear e de energia, conceitos físicos esses definidos no Capítulo 1. Além do mais, o formalismo da $MQBB$ apresenta uma grande vantagem em relação ao formalismo da MQS, uma vez que é possível, com o primeiro formalismo, deduzir expressões gerais para a **probabilidade de transmissão**, e compará-las com os resultados já conhecidos por intermédio do segundo formalismo.

No Capítulo 6, usamos a $MQBB$ desenvolvida no Capítulo 1 e estudamos a **equação de Schrödinger não-linear** proposta por R. W. Hasse, em 1980/1982. Usando a técnica do $IE-L$ apresentada no Capítulo 3, estudamos a evolução do pacote de onda associado a essa **equação de Hasse** para o caso do Potencial Parabólico Invertido. Desse modo, encontramos uma condição imposta ao parâmetro G dessa equação que garante uma solução tipo **sóliton** para ela.

No Capítulo 7, a técnica do $IE-L$ é ainda empregada para estudar os estados "espremidos" ("squeezed") do Oscilador Harmônico Dependente do Tempo ($OHDT$). Ao estudarmos o caso particular desse $OHDT$ proposto por A. Mostafazadeh, em 1997/1998, J. Y. Li, J. K. Kim e S. P. Kim, em 1995, C. F. Lo, em 1991, e G. S. Agarwal e S. A. Kumar, em 1991, verificamos que as propriedades do sistema físico estudado por intermédio da $MQBB$ são mais aparentes do que quando se usa a MQS.

No Capítulo 8, estudamos o espalhamento de uma partícula livre através de um poço de potencial, em duas situações: região não-dissipativa e região dissipativa, usando os formalismos da MQS e da $MQBB$, com a consideração da continuidade da função de onda e de sua derivada espacial nas fronteiras desse poço. Na primeira situação, observamos que os resultados são idênticos. Na segunda, usamos a **equação de Kostin** para estudar o **efeito Ramsauer-Townsend** e, com isso, reproduzimos os mesmos resultados da MQS. Registre-se que esse efeito, observado por C. W. Ramsauer, em 1921, e por J. S. E. Townsend e V. A. Bailey, em 1922, refere-se à transparência de alguns gases nobres em relação a elétrons com energias cinéticas críticas.

Ainda nesse Capítulo 8 e usando seus resultados, apresentamos um breve estudo do tunelamento através de barreiras de potencial delgadas. Nesse estudo, reproduzimos alguns resultados do Capítulo 5, assim como mostramos que quando há dissipação há um aumento no tunelamento.

No Apêndice, calculamos exatamente o **propagador de Feynman** (PF) para um lagrangiano quadrático tridimensional

dependente do tempo, resolvendo a **equação de Schrödinger linear**. Ao usarmos uma rotação e uma superposição não-linear de coordenadas, mostramos que esse propagador pode ser obtido do **propagador da partícula livre** em um novo sistema de coordenadas espaço-temporal.

Encontrada a expressão geral do PF referida acima, partimos dela para obter o propagador do Oscilador Harmônico Forçado Unidimensional. De posse desse propagador, estudamos os seguintes casos particulares: 1) Oscilador Harmônico Simples Unidimensional Dependente do Tempo; 2) Oscilador Harmônico Simples Unidimensional Independente do Tempo; 3) Oscilador Harmônico Forçado Unidimensional Independente do Tempo; 4) Partícula em um Campo Externo Constante; 5) Partícula Livre. Nossos resultados reproduzem exatamente os mesmos obtidos usando-se a técnica das **integrais de trajetória de Feynman**, conforme se pode ver no livro editado por C. Grosche e F. Steiner: **Handbook of Feynman Path Integrals**, Springer-Verlag, 1998.

Dois dos autores (JMFB e MSDC) agradecem ao professor Aluisio Neves Fagundes, do Departamento de Física Aplicada do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, pelo auxílio na impressão do texto em TEX.

Belém, abril de 2002

JOSÉ MARIA FILARDO BASSALO

PAULO DE TARSO SANTOS ALENCAR

MAURO SÉRGIO DORSA CATTANI

ANTONIO BOULHOSA NASSAR

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

1.1. Introdução

Neste Capítulo, estudaremos a Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$), também conhecida como **formulação causal da Mecânica Quântica**, para sistemas físicos sob a ação de um potencial geral $V(x,\ t)$. Essa formulação, que associa o movimento de uma partícula em Mecânica Quântica Não Relativista com o movimento de uma partícula em Dinâmica dos Fluidos, foi proposta pelos físicos, o alemão Erwin Madelung (1881-1972), em 1926, e o francês, o Príncipe Louis Victor Pierre Raymond de Broglie [1892-1987; Prêmio Nobel de Física (PNF), 1929], em 1926-1927, e retomada pelo físico norte-americano David Bohm (1917-1992), em trabalhos realizados desde 1952 até próximo de sua morte.[1]

No estudo que faremos neste Capítulo, partiremos da **equação de Schrödinger**, em seus dois aspectos, linear e não-linear, representando um dado sistema físico e, usando-se a **transformação de Madelung-Bohm**,[2] obteremos, inicialmente, equações correspondentes às da Dinâmica dos Fluidos (ideais e reais). Em seguida, demonstraremos as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica para os sistemas físicos considerados. Com isso, poderemos examinar se há **coerência** ou **descoerência** de sua evolução, e também, se são **conservativos** ou **não-conservativos**; neste último caso, verificaremos se são ou não **dissipativos**. Registre-se que os conceitos físicos acima mencionados serão precisados neste Capítulo e nos demais que se seguirão. Portanto, o estudo que iremos realizar constitui a $MQBB$.

Por fim, é oportuno fazermos uma observação com relação às Leis de Conservação que demonstraremos neste

Capítulo. Muito embora as equações diferenciais das grandezas físicas referentes a essas Leis, e que aqui trataremos, sejam relacionadas com as densidades volumétricas dessas grandezas, falaremos da Lei de Conservação da grandeza em si, uma vez que, conhecidas essas densidades, uma integração em todo o espaço delas, reproduz as próprias grandezas.

1.2. Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm de Sistemas Físicos Conservativos

Neste item, estudaremos os sistemas físicos conservativos por intermédio da $MQBB$, partindo-se da **equação de Schrödinger** em seus dois aspectos: linear e não-linear.

1.2.1. Equação de Schrödinger

Em 1926,[3] o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933) propôs a seguinte equação, conhecida como **equação de Schrödinger linear**, para tratar sistemas físicos conservativos:

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t} = -\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2\ \psi(x,\ t)}{\partial x^2} + $$

$$+\,V(x,\ t)\ \psi(x,\ t)\ , \qquad (1.2.1.1)$$

e tomemos a função de onda $\psi(x,\ t)$ na forma polar ou **transformação de Madelung-Bohm**:

$$\psi(x,\ t) = \phi(x,\ t)\ e^{i\ S(x,\ t)}, \qquad (1.2.1.2)$$

onde $S(x,\ t)$ é a **ação clássica** e $\phi(x,\ t)$ será definido posteriormente.

Calculando-se as derivadas, temporal e espacial, de (1.2.1.2), virá:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = e^{i\ S}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} + i\ \phi\ e^{i\ S}\,\frac{\partial S}{\partial t} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \;=\; e^{i\;S}\;(\frac{\partial\phi}{\partial t} \;+\; i\;\phi\;\frac{\partial S}{\partial t}) \;=$$

$$=\;(i\;\frac{\partial S}{\partial t} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial\phi}{\partial t})\;\psi\;, \qquad (1.2.1.3\text{a-b})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \;=\; e^{i\;S}\;(\frac{\partial\phi}{\partial x} \;+\; i\;\phi\;\frac{\partial S}{\partial x}) \;=$$

$$=\;(i\;\frac{\partial S}{\partial x} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial\phi}{\partial x})\;\psi\;, \qquad (1.2.1.3\text{c-d})$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\;[(i\;\frac{\partial S}{\partial x} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial\phi}{\partial x})\;\psi] =$$

$$= \psi\;[i\;\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;-\; \frac{1}{\phi^2}\;(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2] \;+$$

$$+\;(i\;\frac{\partial S}{\partial x} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial\phi}{\partial x})\;\frac{\partial\psi}{\partial x} \;=$$

$$= \psi\;[i\;\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;-\; \frac{1}{\phi^2}\;(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2] \;+$$

$$+\;(i\;\frac{\partial S}{\partial x} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial\phi}{\partial x})\;(i\;\frac{\partial S}{\partial x} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial\phi}{\partial x})\;\psi \;=$$

$$= \psi\;[i\;\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;-\; \frac{1}{\phi^2}\;(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 \;-\; (\frac{\partial S}{\partial x})^2 \;+$$

$$+\;\frac{1}{\phi^2}\;(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 \;+\; 2\;\frac{i}{\phi}\;\frac{\partial S}{\partial x}\;\frac{\partial\phi}{\partial x}] \;\;\rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \;=\; e^{i\;S}\;[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;+\; 2\;i\;\frac{\partial S}{\partial x}\;\frac{\partial\phi}{\partial x} \;+$$

$$+\;i\;\phi\;\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;-\; \phi\;(\frac{\partial S}{\partial x})^2] \;=$$

$$=\;[i\;\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;+\; \frac{1}{\phi}\;\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;-$$

$$-\;(\frac{\partial S}{\partial x})^2 \;+\; 2\;i\;\frac{1}{\phi}\;\frac{\partial S}{\partial x}\;\frac{\partial\phi}{\partial x}]\;\psi\;. \qquad (1.2.1.3\text{e-f})$$

Agora, consideremos a expressão (1.2.1.1). Assim, inserindo-se as expressões (1.2.1.3a,e) nessa expressão, resultará [lembrar que $e^{i\ S}$ é fator comum, $\phi(x,\ t)$ e $V(x,\ t)$]:

$$i\ \hbar\ (\frac{\partial\phi}{\partial t}\ +\ i\ \phi\ \frac{\partial S}{\partial t})\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ 2\ i\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\ +\ i\ \phi\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ -\ \phi\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +\ V\ \phi\ . \qquad (1.2.1.4)$$

Separando-se as partes imaginária e real da expressão (1.2.1.4), virá:

a) parte imaginária

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar}{2\ m}\ (2\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\ +\ \phi\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2})\ , \qquad (1.2.1.5)$$

b) parte real

$$-\ \hbar\ \phi\ \frac{\partial S}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ -\ \phi\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +\ V\ \phi\ \quad (\div\ m\ \phi)\ \quad \rightarrow$$

$$-\ \frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{1}{\phi}\ [\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ -\ \phi\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +\ \frac{V}{m}\ . \qquad (1.2.1.6)$$

Vejamos, agora, qual a correlação entre as expressões (1.2.1.5-6) e as equações tradicionais da Dinâmica dos Fluidos Ideais:[4] a) **equação da continuidade**, b) **equação de Euler**. Para isso, façamos a seguinte correspondência:

densidade de probabilidade quântica: $\mid \psi(x,\ t)\mid^2 \quad \longleftrightarrow$

densidade de massa: $\rho(x,\ t)\ =\ \phi^2(x,\ t)\ , \qquad (1.2.1.7)$

gradiente da fase da função de onda: $\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S(x,\ t)}{\partial x} \quad \longleftrightarrow$

velocidades quânticas: $v_{qu}(x,\ t) \equiv v_{qu}\ . \qquad (1.2.1.8)$

Levando-se a expressão (1.2.1.7) na expressão (1.2.1.5), teremos:

$$\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2\ m} (2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} + \sqrt{\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\ \sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2\ m} (2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{1}{2\ \sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \sqrt{\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\hbar}{m} (\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}) . \qquad (1.2.1.9)$$

Considerando-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} ,$$

e a expressão (1.2.1.8), a expressão (1.2.1.9) ficará:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \frac{\partial S}{\partial x}) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x} = 0 , \qquad (1.2.1.10)$$

expressão que representa a **equação da continuidade** ou **lei de conservação da massa** da Dinâmica dos Fluidos. (Vide observação no final do item 1.1.)[4] Por outro lado, essa expressão também indica a coerência do sistema físico considerado representado pela **equação de Schrödinger**. Mais tarde, no Capítulo 3, mostraremos que essa **coerência** relaciona-se com a conservação da amplitude do **pacote de onda** associado ao sistema físico em questão.

Definindo-se como **potencial quântico** V_{qu} a expressão indicada abaixo:

$$V_{qu}(x,\ t) \equiv V_{qu} = - (\frac{\hbar^2}{2\ m\ \phi}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} =$$

$$= - \frac{\hbar^2}{2\ m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} , \qquad (1.2.1.11a\text{-}b)$$

a expressão (1.2.1.6) será escrita na forma:

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\ m^2} (\frac{\partial S}{\partial x})^2 = - \frac{1}{m} (V + V_{qu}) , \qquad (1.2.1.12a)$$

ou, equivalentemente, usando-se a expressão (1.2.1.8):

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} + [\frac{1}{2} m\ v_{qu}^2 + V + V_{qu}] = 0 . \qquad (1.2.1.12b)$$

Derivando-se a expressão (1.2.1.12a) em relação a x e considerando-se a expressão (1.2.1.8), virá:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\hbar^2}{2\ m^2} (\frac{\partial S}{\partial x})^2] = - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{2} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x})^2] = - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2} v_{qu}^2) = - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) = 0 , \qquad (1.2.1.13)$$

que é uma equação análoga à **equação de Euler** para o movimento de um fluido ideal.[4] Essa expressão indica que o **pacote de onda**, associado ao sistema físico em estudo, não se distorce nem se dissipa, conforme examinaremos com mais detalhes no Capítulo 3.

Considerando-se que:

$$v_{qu}(x,\ t) \mid_{x=x(t)} = \frac{dx}{dt} , \qquad (1.2.1.14)$$

a expressão (1.2.1.13) poderá ser escrita na forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) \equiv$$

$$\equiv F_c(x,\ t) \mid_{x=x(t)} + F_{qu}(x,\ t) \mid_{x=x(t)} , \qquad (1.2.1.15)$$

onde:

$$\frac{d}{dt} \; = \; \frac{\partial}{\partial t} \; + \; v_{qu} \, \frac{\partial}{\partial x} \; , \qquad (1.2.1.16)$$

é a **derivada convectiva** ou **derivada hidrodinâmica**.[4]

Observe-se que a expressão (1.2.1.15) tem a forma da **segunda lei de Newton**. Desse modo, as expressões (1.2.1.10,13,15) resumem a Dinâmica da $MQBB$, ou seja, elas representam a dinâmica de uma partícula quântica que se desloca com uma velocidade $\vec{v}_{qu}$ em um meio não-viscoso, sujeita a um potencial clássico arbitrário V e a um **potencial quântico** V_{qu}, conhecido como **potencial quântico de Bohm**.[5].

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos Ideais, estudaremos as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica. (Vide observação no final do item 1.1.)

a) Conservação do Momento Linear Quântico

Em analogia com a Mecânica dos Fluidos, a **densidade de momento linear quântico** J_{qu} é definida pela expressão:

$$J_{qu} \; = \; \rho \, v_{qu} \; , \qquad (1.2.1.17)$$

onde ρ e v_{qu} são dados pelas expressões (1.2.1.7-8).

Tomando-se a expressão (1.2.1.17), derivando-a em relação ao tempo t e usando-se as expressões (1.2.1.10,13), teremos:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \; = \; \frac{\partial}{\partial t} \, (\rho \, v_{qu}) \; = \; \rho \, \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \; + \; v_{qu} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; =$$

$$= \rho \, [- \, v_{qu} \, \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; - \; \frac{1}{m} \, \frac{\partial}{\partial x}(V \; + \; V_{qu})] \; + \; v_{qu} \, [- \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu})] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \rho \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - v_{qu} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}[(\rho \ v_{qu}) \ v_{qu}] - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho \ v_{qu}^2) - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} \ . \qquad (1.2.1.18)$$

Derivando-se a expressão (1.2.1.11b) em relação à variável x, teremos:

$$\frac{\partial V_{qu}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ (- \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) = - \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x})] =$$

$$= - \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{1}{2 \ \sqrt{\rho}} \ \frac{\partial \rho}{\partial x})] =$$

$$= - \frac{\hbar^2}{4 \ m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ \Big(\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{1}{\sqrt{\rho}})] \ \Big) =$$

$$= - \frac{\hbar^2}{4 \ m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{1}{2 \ \sqrt{\rho^3}} \ \frac{\partial \rho}{\partial x})] =$$

$$= - \frac{\hbar^2}{4 \ m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{1}{\rho} \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2 \ \rho^2} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] =$$

$$= - \frac{\hbar^2}{4 \ m} \ [\frac{1}{\rho} \ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ \frac{1}{\rho^2} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{2 \ \rho^2} \ 2 \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x}) - (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2 \ (- \frac{2}{2}) \ \frac{1}{\rho^3} \ \frac{\partial \rho}{\partial x}] \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial V_{qu}}{\partial x} = - \frac{\hbar^2}{4 \ m} \ [\frac{1}{\rho} \ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} - \frac{2}{\rho^2} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho^3} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^3] \ \rightarrow$$

$$\frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} = - \frac{\hbar^2}{4 \ m^2} \ [\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} - \frac{2}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho^2} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^3] \ \rightarrow$$

$$\frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} = - \frac{\hbar^2}{4 \ m^2} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \ . \qquad (1.2.1.19)$$

Agora, consideremos a expressão (1.2.1.5). Portanto, inserindo-se a expressão (1.2.1.19) nessa expressão, virá:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho\ v_{qu}^2) - \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{4\ m^2} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \Big(\rho\ v_{qu}^2 - \frac{\hbar^2}{4\ m^2} [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \Big) -$$

$$- \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial x} . \qquad (1.2.1.20)$$

Definindo-se como **fluxo da densidade de momento linear quântico** P_{qu} a expressão abaixo:

$$P_{qu} = \rho\ v_{qu}^2 - \frac{\hbar^2}{4\ m^2} [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] , \qquad (1.2.1.21)$$

a expressão (1.2.1.20) ficará:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \qquad (1.2.1.22)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear Quântico**.

b) Conservação da Energia Quântica

Em analogia com a Mecânica dos Fluidos, a **densidade de energia quântica** U_{qu} é definida pela expressão:

$$U_{qu} = \rho\ [\frac{v_{qu}^2}{2} + \frac{1}{m} (V + V_{qu})] . \qquad (1.2.1.23)$$

Derivando-se U_{qu} em relação ao tempo t e considerando-se as expressões (1.2.1.7,10,11b,13), virá:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} = \rho\ v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + \frac{v_{qu}^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{V}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{V_{qu}}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\ v_{qu} [- v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu})] +$$

$$+ \frac{v_{qu}^2}{2} \, [- \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu})] \, + \, \frac{V}{m} \, [- \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu})] \, +$$

$$+ \, \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial t} \, + \, \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \, + \, \frac{V_{qu}}{m} \, [- \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu})] \quad \to$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; = \; - \, \rho \, v_{qu} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\frac{v_{qu}^2}{2}) \, - \, \frac{\rho \, v_{qu}}{m} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (V \, + \, V_{qu}) \, -$$

$$- \, \frac{v_{qu}^2}{2} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu}) \, - \, \frac{V}{m} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu}) \, + \, \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial t} \, +$$

$$+ \, \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \, - \, \frac{V_{qu}}{m} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu}) \, . \qquad (1.2.1.24)$$

Sabendo-se que:

$$- \, \frac{\partial}{\partial x} \, [\rho \, v_{qu} \, (\frac{v_{qu}^2}{2} \, + \, \frac{V}{m} \, + \, \frac{V_{qu}}{m})] \; =$$

$$- \, \rho \, v_{qu} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\frac{v_{qu}^2}{2}) \, - \, \frac{v_{qu}^2}{2} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\rho \, v_{qu}) \, -$$

$$- \, \frac{\rho \, v_{qu}}{m} \, \frac{\partial V}{\partial x} \, - \, \frac{V}{m} \, \frac{\partial}{\partial x}(\rho \, v_{qu}) \, - \, \frac{\rho \, v_{qu}}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} \, - \, \frac{V_{qu}}{m} \, \frac{\partial}{\partial x}(\rho \, v_{qu}) \, ,$$

a expressão (1.2.1.24) ficará:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; = \; - \, \frac{\partial}{\partial x} \, [\rho \, v_{qu} \, (\frac{v_{qu}^2}{2} \, + \, \frac{V}{m} \, + \, \frac{V_{qu}}{m})] \, +$$

$$+ \, \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial t} \, + \, \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \, . \qquad (1.2.1.25)$$

Considerando-se que:

$$\rho \, \frac{\partial}{\partial t} \, (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \, \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) \; = \; \rho \, [\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\sqrt{\rho}}) \, + \, \frac{1}{\sqrt{\rho}} \, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})] \; =$$

$$= [- \, \frac{\rho}{2 \, \sqrt{\rho^3}} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \, + \, \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \, (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})] \; =$$

$$= [- \frac{1}{2\,\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial \rho}{\partial t}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}\ +\ \sqrt{\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})]\ \ \rightarrow$$

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ =\ \sqrt{\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -$$

$$-\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\,(\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ . \qquad (1.2.1.26a)$$

Considerando-se ainda que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[\sqrt{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\,\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}]\ =$$

$$=\ \sqrt{\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ +\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\,\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}\ -\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\,(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x})\ -$$

$$-\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}(\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ =\ \sqrt{\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}(\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ ,$$

a expressão (1.2.1.26a) será escrita na forma:

$$\rho\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\,[\sqrt{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\,\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}]\ .$$

Desse modo, a expressão acima nos mostra que:

$$\frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{qu}}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\,[\rho\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})]\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{qu}}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\partial}{\partial x}\,\Big(\,\frac{\hbar^2}{2\ m^2}\,[\sqrt{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -$$

$$-\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\,\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}]\,\Big)\ . \qquad (1.2.1.26b)$$

Agora, consideremos a expressão (1.2.1.25). Desse modo, inserindo-se a expressão (1.2.1.26b) nessa expressão e usando-se a expressão (1.2.1.23), teremos:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; - \; \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial t} \; + \; \frac{\partial}{\partial x} \Big(\, v_{qu} \, U_{qu} \; +$$

$$+ \; \frac{\hbar^2}{2 \; m^2} \, [\sqrt{\rho} \; \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \; - \; \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \, \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \, \Big) \; = \; 0 \; . \qquad (1.2.1.27)$$

Definindo-se como **fluxo da densidade de energia quântica** Q_{qu} a expressão abaixo:

$$Q_{qu} \; = \; v_{qu} \, U_{qu} \; + \; \frac{\hbar^2}{2 \; m^2} \, [\sqrt{\rho} \; \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \; -$$

$$- \; \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \, \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \; , \qquad (1.2.1.28)$$

a expressão (1.2.1.27) tomará a forma:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; - \; \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial t} \; + \; \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} \; = \; 0 \; , \qquad (1.2.1.29)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia Quântica**. O fato da expressão (1.2.1.29) ser zero indica que a **equação de Schrödinger linear** para um potencial geral $V(x, \; t)$ representa sistemas físicos conservativos.

1.2.2. Equação de Bialynicki-Birula-Mycielski

Em 1976/1979,[6] I. Bialynicki-Birula e J. Mycielski propuseram a seguinte **equação de Schrödinger não-linear** para descrever os sistemas físicos conservativos:

$$i \, \hbar \, \frac{\partial}{\partial t} \, \psi(x, \; t) \; = \; - \; \frac{\hbar^2}{2 \; m} \, \frac{\partial^2 \psi(x, \; t)}{\partial x^2} \; + \; \Big(\, V(x, \; t) \; -$$

$$- \; \frac{\hbar \; \lambda}{2} \, \ell n \, [\psi(x, \; t) \; \psi^*(x, \; t)] \, \Big) \, \psi(x, \; t) \; , \qquad (1.2.2.1)$$

onde $\psi(x, \; t)$ e $V(x, \; t)$ representam, respectivamente, a função de onda e o potencial dependente do tempo do sistema em consideração, e λ é uma constante arbitrária.

Substituindo-se as expressões (1.2.1.2) e (1.2.1.3a,e) na expressão (1.2.2.1), virá (lembrar que $e^{i\ S}$ é um fator comum):

$$i\ \hbar\ (\frac{\partial \phi}{\partial t}\ +\ i\ \phi\ \frac{\partial S}{\partial t})\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\ +\ 2\ i\ \frac{\partial \phi}{\partial x}\ \frac{\partial S}{\partial x}\ +\ i\ \phi\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ -\ \phi\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +$$

$$+\ [V(x,\ t)\ -\ \frac{\hbar\ \lambda}{2}\ \ell n\ \phi^2]\ \phi\ . \qquad (1.2.2.2)$$

Separando-se as partes imaginária e real da expressão acima, resultará:

a) parte imaginária

$$\frac{\hbar}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ 2\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}\ \frac{\partial S}{\partial x})\ , \qquad (1.2.2.3)$$

b) parte real

$$-\ \hbar\ \frac{\partial S}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +$$

$$+\ V(x,\ t)\ -\ \frac{\hbar\ \lambda}{2}\ \ell n\ \phi^2\ . \qquad (1.2.2.4)$$

Vejamos, agora, qual a correlação entre as expressões (1.2.2.3-4) e as equações tradicionais da Dinâmica dos Fluidos Ideais, referidas anteriormente. Assim, usando-se as expressões (1.2.1.7-9), a expressão (1.2.2.3) ficará [é oportuno lembrar que $\frac{\partial}{\partial v}\ (\ell n\ u)\ =\ \frac{1}{u}\ \frac{\partial\ u}{\partial v}$ e $\ell n\ (u^n)\ =\ n\ \ell n\ u$]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (2\ \ell n\ \phi)\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (2\ \ell n\ \phi)]\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\ell n\ \phi^2)\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \phi^2)]\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\ell n\ \rho)\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \rho)]\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar}{m}\ (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial x})\ =\ -\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})\ -$$

$$-\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \ \rightarrow\ \ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial t}\ +\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +\ \frac{v_{qu}}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\ +\ \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x} = 0, \qquad (1.2.2.5)$$

expressão que representa a **equação da continuidade** ou **lei de conservação da massa** da Dinâmica dos Fluidos. (Vide observação no final do item 1.1.)[4] Como no caso anterior, essa expressão também indica a coerência do sistema físico representado pela **equação de Bialynicki-Birula-Mycielski**.

Derivando-se a expressão (1.2.2.4) em relação à variável x, e considerando-se as expressões (1.2.1.7,11a), resultará:

$$-\ \hbar\ \frac{\partial^2 S}{\partial x\ \partial t}\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +\ \frac{\partial}{\partial x}\ [V(x,\ t)\ -\ \frac{\hbar\ \nu}{2}\ \ell n\ \phi^2]\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})\ =$$

$$=\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) - \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})^2 - \frac{1}{m}\ \frac{\partial V(x,\ t)}{\partial x} + \frac{\hbar\ \lambda}{2\ m}\ \frac{\partial(\ell n\ \rho)}{\partial x}\ =$$

$$=\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - V(x,\ t) + \frac{\hbar\ \lambda}{2}\ \ell n\ \rho] - \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})^2\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ +\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +$$

$$+\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V\ +\ V_{qu}\ -\ V_{BBM})\ =\ 0\ , \qquad (1.2.2.6)$$

onde:

$$V_{BBM} \;=\; \frac{\hbar\,\lambda}{2}\;\ell n\;\rho\;, \qquad (1.2.2.7)$$

é o **potencial de Bialynicki-Birula-Mycielski**. Observe-se que a expressão (1.2.2.6) é uma equação análoga à **equação de Euler** para o movimento de um fluido ideal e, portanto, da mesma maneira como no caso da expressão (1.2.1.13), ela indica que o **pacote de onda**, associado ao sistema físico considerado, não se distorce.

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos Ideais, poderemos demonstrar as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica. (Vide observação no final do item 1.1.) Para demonstrarmos a primeira dessas Leis, consideremos as expressões (1.2.1.14,16,18) e (1.2.2.5-6). Assim, seguindo-se o que foi realizado no item anterior, obteremos:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho\;v_{qu}) \;=\; \rho\,\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \;+\; v_{qu}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} \;=$$

$$=\;\rho\,[-\;v_{qu}\,\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \;-\; \frac{1}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}(V \;+\; V_{qu} \;-\; V_{BMM})] \;+$$

$$+\;v_{qu}\,[-\;\frac{\partial}{\partial x}\;(\rho\;v_{qu})] \quad\rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \;=\; -\;\rho\;v_{qu}\,\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \;-\; v_{qu}\,\frac{\partial}{\partial x}\;(\rho\;v_{qu}) \;-\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;-\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{qu}}{\partial x} \;+$$

$$+\;\frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} \quad\rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \;=\; -\;\frac{\partial}{\partial x}(\rho\;v_{qu}^2) \;-\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;-\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{qu}}{\partial x} \;+\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} \quad\rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \;=\; -\;\frac{\partial}{\partial x}\,\Big(\;\rho\;v_{qu}^2 \;-\; \frac{\hbar^2}{4\;m^2}\,[\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \;-\; \frac{1}{\rho}\;(\frac{\partial \rho}{\partial x})^2]\;\Big) \;-$$

$$-\;\frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;+\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} \quad\rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \;+\; \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} \;+\; \frac{\rho}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\;(V \;-\; V_{BMM}) \;=\; 0\;, \qquad (1.2.2.8)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear Quântico**.

Em seguida, demonstraremos a Lei de Conservação da Energia Quântica. Desse modo, considerando-se as expressões (1.2.1.11b,14,20,23b,25) e (1.2.2.5-6), teremos:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} = \rho\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + \frac{v_{qu}^2}{2}\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{V}{m}\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{V_{qu}}{m}\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\ v_{qu}\ [-\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V + V_{qu}) +$$

$$+ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} + \frac{v_{qu}^2}{2}\ [-\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu})] + \frac{V}{m}\ [-\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu})] +$$

$$+ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} + \frac{V_{qu}}{m}\ [-\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu})] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} = -\ \rho\ v_{qu}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{v_{qu}^2}{2}) - \frac{\rho\ v_{qu}}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V + V_{qu})] -$$

$$-\ \frac{v_{qu}^2}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu}) - \frac{V}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu}) + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} -$$

$$-\ \frac{\rho\ \hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) - \frac{V_{qu}}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v) + \frac{\rho\ v_{qu}}{m}\ \frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} = -\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\rho\ v_{qu}\ (\frac{v_{qu}^2}{2} + \frac{V}{m} + \frac{V_{qu}}{m})] + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} -$$

$$-\ \frac{\rho\ \hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) + \frac{\rho\ v_{qu}}{m}\ \frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ v_{qu}\ U_{qu} + \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ [\sqrt{\rho}\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) - \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}]\ \Big) -$$

$$-\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\rho\ v_{qu}}{m}\ \frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} - \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{J_{qu}}{m}\ \frac{\partial V_{BMM}}{\partial x} = 0, \qquad (1.2.2.9)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia Quântica**. O fato da expressão (1.2.2.9) ser nula indica que a **equação de Bialynicki-Birula-Mycielski** (que representa uma **equação de Schrödinger não-linear**) para um potencial geral $V(x,\ t)$ representa sistemas físicos conservativos.

1.2.3. Equação de Bateman-Caldirola-Kanai

Em 1931/1941/1948,[7] H. Bateman, P. Caldirola e E. Kanai propuseram uma **equação de Schrödinger não-linear** para representar os sistemas físicos de massa variável, dada por:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ e^{-\ \lambda\ t}\ \frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial t^2}\ +$$

$$+\ e^{\lambda\ t}\ V(x,\ t)\ \psi(x,\ t)\ , \qquad (1.2.3.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ e $V(x,\ t)$ representam, respectivamente, a função de onda e o potencial dependente do tempo do sistema físico em consideração, e λ é um fator constante.

Usando-se as expressões (1.2.1.3b,f), na expressão acima, virá:

$$i\,\hbar\,(i\,\frac{\partial S}{\partial t}\ +\ \frac{1}{\phi}\,\frac{\partial \phi}{\partial t})\ \psi\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ e^{-\ \lambda\ t}\ [i\,\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\phi}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -$$

$$-\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2\ +\ 2\ \frac{i}{\phi}\,\frac{\partial S}{\partial x}\,\frac{\partial \phi}{\partial x}]\ \psi\ +\ e^{\lambda\ t}\ V(x,\ t)\ \psi(x,\ t)\ . \qquad (1.2.3.2)$$

Desse modo, separando-se as partes imaginária e real da expressão acima, obteremos (é oportuno lembrar que ψ é fator comum):

a) parte imaginária

$$\frac{\hbar}{\phi}\,\frac{\partial \phi}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ e^{-\ \lambda\ t}\ (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{2}{\phi}\,\frac{\partial S}{\partial x}\,\frac{\partial \phi}{\partial x})\ , \qquad (1.2.3.3)$$

b) <u>parte real</u>

$$- \hbar \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2\ m} e^{- \lambda\ t} [\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (\frac{\partial S}{\partial x})^2] +$$

$$+ e^{\lambda\ t} V(x,\ t) . \qquad (1.2.3.4)$$

Vejamos, agora, qual a correlação entre as expressões (1.2.3.3-4) e as equações tradicionais da Dinâmica dos Fluidos.[4]

Usando-se as expressões (1.2.1.7-8) e (1.2.3.3), obteremos [lembrar que $\frac{\partial}{\partial v} (\ell n\ u) = \frac{1}{u} \frac{\partial\ u}{\partial v}$ e $\ell n\ (u^n) = n\ \ell n\ u$]:

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2\ m} e^{- \lambda\ t} (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \phi / \partial x}{\phi}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\ \ell n\ \phi) = - \frac{\hbar}{m} e^{- \lambda\ t} [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (2\ \ell n\ \phi)] \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\ell n\ \phi^2) = - \frac{\hbar}{m} e^{- \lambda\ t} [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\ell n\ \phi^2)] \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\ell n\ \rho) = - \frac{\hbar}{m} e^{- \lambda\ t} [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\ell n\ \rho)] \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\hbar}{m} e^{- \lambda\ t} (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}) =$$

$$= - e^{- \lambda\ t} [\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x})] =$$

$$= - e^{- \lambda\ t} (\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \frac{v_{qu}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + e^{- \lambda\ t} (\rho \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + v_{qu} \frac{\partial \rho}{\partial x}) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + e^{- \lambda\ t} \frac{\partial (\rho\ v_{qu})}{\partial x} = 0 . \qquad (1.2.3.5)$$

Para que a expressão acima assuma a forma da **equação da continuidade** da Mecânica dos Fluidos como, por exemplo, as expressões (1.2.1.10) e (1.2.2.5), vamos introduzir a seguinte definição:

$$v_{BCK} \equiv e^{-\lambda t} v_{qu} \;, \qquad (1.2.3.6)$$

que significa a **velocidade de Bateman-Caldirola-Kanai**. Assim, levando-se essa expressão na expressão (1.2.3.5), virá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \; e^{-\lambda t} \; v_{qu})}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \; v_{BCK})}{\partial x} = 0 \;, \qquad (1.2.3.7)$$

expressão essa que representa a **equação da continuidade** ou **lei de conservação da massa** da Dinâmica dos Fluidos. (Vide observação no final do item 1.1.)[4] Assim como nos casos anteriores, essa expressão indica a coerência do sistema físico representado pela **equação de Bateman-Caldirola-Kanai**.

Derivando-se a expressão (1.2.3.4) em relação à variável x e usando-se as expressões (1.2.1.8,11a), virá:

$$- \hbar \frac{\partial^2 S}{\partial x \; \partial t} = - \frac{\hbar^2}{2 \; m} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right] + e^{\lambda t} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right) = - \frac{e^{-\lambda t}}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\hbar^2}{2 \; m} \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) -$$

$$- \frac{e^{-\lambda t}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{e^{\lambda t}}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} = - \frac{e^{-\lambda t}}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \frac{\partial v_{qu}^2}{\partial x} - \frac{e^{\lambda t}}{m} \frac{\partial V}{\partial x} =$$

$$= - \frac{e^{-\lambda t}}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - e^{-\lambda t} v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{e^{\lambda t}}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ e^{- \ \lambda \ t} \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ +$$

$$+ \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (e^{\lambda \ t} \ V \ + \ e^{- \ \lambda \ t} \ V_{qu}) \ = \ 0 \ . \qquad (1.2.3.8)$$

Em analogia com a expressão (1.2.3.6), vamos introduzir a seguinte definição:

$$V_{BCK} \equiv e^{- \ 2 \ \lambda \ t} \ V_{qu} \ , \qquad (1.2.3.9)$$

que significa o **potencial de Bateman-Caldirola-Kanai**, sendo V_{qu} dado pela expressão (1.2.1.11a-b). Desse modo, multiplicando-se a expressão (1.2.3.10) por $e^{- \ \lambda \ t}$ e usando-se as expressões (1.2.3.8,11), virá:

$$e^{- \ \lambda \ t} \ \frac{\partial \ v_{qu})}{\partial t} \ + \ e^{- \ \lambda \ t} \ v_{qu} \ \frac{\partial (e^{- \ \lambda \ t} \ v_{qu})}{\partial x} \ +$$

$$+ \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ e^{- \ 2 \ \lambda \ t} \ V_{qu}) \ = \ 0 \ . \qquad (1.2.3.10)$$

Derivando-se a expressão (1.2.3.6) em relação ao tempo t, obteremos:

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} \ = \ \frac{\partial}{\partial t} \ (e^{- \ \lambda \ t} \ v_{qu}) \ = \ e^{- \ \lambda \ t} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ v_{qu} \ \frac{\partial (e^{- \ \lambda \ t})}{\partial t} \ =$$

$$= \ e^{- \ \lambda \ t} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ - \ \lambda \ e^{- \ \lambda \ t} \ v_{qu} \quad \rightarrow$$

$$e^{- \ \lambda \ t} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ = \ \frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} \ + \ \lambda \ v_{BCK} \ . \qquad (1.2.3.11)$$

Usando-se a expressão (1.2.3.10), inserindo-se na mesma a expressão (1.2.3.11) e usando-se as expressões (1.2.3.6,9), resultará:

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} \ + \ v_{BCK} \ \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} \ +$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{BCK}) = - \lambda v_{BCK} . \qquad (1.2.3.12)$$

Observe-se que, embora a equação acima seja análoga à **equação de Navier-Stokes**,[4] ela representa, no entanto, um sistema conservativo, conforme veremos mais adiante.

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos Reais, poderemos demonstrar as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica. (Vide observação no final do item 1.1.) Antes, contudo, em analogia com as expressões (1.2.1.14,18,20,25) e (1.2.3.6,9), apresentaremos as seguintes definições:

$$J_{BCK} = \rho \, v_{BCK} , \qquad (1.2.3.13)$$

$$P_{BCK} = \rho \, v_{BCK}^2 -$$

$$- e^{-2 \lambda t} \frac{\hbar^2}{4 m^2} [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] , \qquad (1.2.3.14)$$

$$U_{BCK} = \rho \, [\frac{v_{BCK}^2}{2} + \frac{1}{m} (V + V_{BCK})] , \qquad (1.2.3.15)$$

$$Q_{BCK} = v_{BCK} \, U_{BCK} + e^{-2 \lambda t} \frac{\hbar^2}{2 m^2} [\sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) -$$

$$- \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] , \qquad (1.2.3.16)$$

que representam, respectivamente, a **densidade de momento linear de Bateman-Caldirola-Kanai** J_{BCK}, o **fluxo de densidade de momento linear de Bateman-Caldirola-Kanai** P_{BCK}, a **densidade de energia de Bateman-Caldirola-Kanai** U_{BCK}, e o **fluxo da densidade de energia quântica de Bateman-Caldirola-Kanai** Q_{BCK}, e ρ, v_{BCK} e V_{BCK} são dados, respectivamente, pelas expressões (1.2.1.7) e (1.2.3.6,9).

Para demonstrarmos a primeira das Leis referidas acima, consideremos as expressões (1.2.3.9,12-14). Assim, seguindo-se o que foi realizado no item 1.2., obteremos:

$$\frac{\partial J_{BCK}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\ v_{BCK}) = \rho \frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} + v_{BCK} \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \rho\ [-\ v_{BCK} \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x}(V + V_{BCK}) - \lambda\ v_{BCK}] +$$

$$+\ v_{BCK}\ [-\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{BCK})] \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{BCK}}{\partial t} = -\ \rho\ v_{BCK} \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} - v_{BCK} \frac{\partial}{\partial x} (\rho\ v_{BCK}) -$$

$$-\ \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x} - \rho\ \nu\ v_{BCK} \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{BCK}}{\partial t} = -\ \frac{\partial}{\partial x}[(\rho\ v_{BCK})\ v_{BCK}] - \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial x} -$$

$$-\ \frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x} - \rho\ \lambda\ v_{BCK} \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{BCK}}{\partial t} = -\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho\ v_{BCK}^2) - \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial x} -$$

$$-\ \frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x} - \rho\ \lambda\ v_{BCK}\ . \qquad (1.2.3.17)$$

Usando-se as expressões (1.2.1.16) e (1.2.3.6), teremos:

$$\frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x} = \frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial x}\ (e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ V_{qu}) = e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ (\frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x}) \ \rightarrow$$

$$\frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x} =$$

$$= -\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2]\ \right)\ . \qquad (1.2.3.18)$$

Tomando-se a expressão (1.2.3.17), inserindo-se nela a expressão (1.2.3.18) e usando-se a expressão (1.2.3.14), obteremos:

$$\frac{\partial J_{BCK}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho\ v_{BCK}^2) - \frac{\rho}{m}\frac{\partial V}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \Big) - \rho\ \lambda\ v_{BCK} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho\ v_{BCK}^2 - e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \Big) -$$

$$- \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} - \rho\ \lambda\ v_{BCK} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{BCK}}{\partial t} + \frac{\partial P_{BCK}}{\partial x} + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} = -\ \lambda\ J_{BCK}\ , \qquad (1.2.3.19)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear de Bateman-Caldirola-Kanai**.

Em seguida, demonstraremos a Lei de Conservação da Energia Quântica de Bateman-Caldirola-Kanai. Para isso, inicialmente, derivemos a expressão (1.2.3.6) em relação ao tempo t.

$$\frac{\partial V_{BCK}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ (e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ V_{BCK}) =$$

$$= e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} + V_{qu}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (e^{-\ 2\ \lambda\ t}) =$$

$$= e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} - 2\ \lambda\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ V_{qu} \quad \rightarrow$$

$$\rho\ \frac{\partial V_{BCK}}{\partial t} = e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \rho\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} - 2\ \lambda\ \rho\ V_{BCK}\ . \qquad (1.2.3.20)$$

Usando-se a expressão (1.2.1.23b) e a expressão acima, resultará:

$$\frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \Big(e^{-2 \lambda t} \frac{\hbar^2}{2 m^2} [\sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) -$$

$$- \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \Big) - 2 \lambda \frac{\rho}{m} V_{BCK} . \qquad (1.2.3.21)$$

Tomando-se as expressões (1.2.3.9,12-16,21) e seguindo-se o item 1.2., teremos:

$$\frac{\partial U_{BCK}}{\partial t} = \rho v_{BCK} \frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} + \frac{v_{BCK}^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} +$$

$$+ \frac{V}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial t} + \frac{V_{BCK}}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \rho v_{BCK} [- v_{BCK} \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{BCK}) -$$

$$- \lambda v_{BCK}] + \frac{v_{BCK}^2}{2} [- \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK})] + \frac{V}{m} [- \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK})] +$$

$$+ \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial t} + \frac{V_{BCK}}{m} [- \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK})] \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{BCK}}{\partial t} = - \rho v_{BCK} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{v_{BCK}^2}{2}) - \frac{\rho v_{BCK}}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{BCK})] -$$

$$- \frac{v_{BCK}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK}) - \frac{V}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK}) + \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \Big(e^{-2 \lambda t} \frac{\hbar^2}{2 m^2} [\sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) - \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \Big) -$$

$$- 2 \lambda \frac{\rho}{m} V_{BCK} - \frac{V_{BCK}}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK}) - \rho v_{BCK}^2 \lambda \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{BCK}}{\partial t} = - (\rho v_{BCK}) \frac{\partial}{\partial x} [\frac{v_{BCK}^2}{2} + \frac{1}{m} (V + V_{BCK})] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_{BCK}) [\frac{v_{BCK}^2}{2} + \frac{1}{m} (V + V_{BCK})] - \rho v_{BCK}^2 \lambda -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \Big(e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ [\sqrt{\rho}\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \Big) -$$

$$-\ 2\ \lambda\ \frac{\rho}{m}\ V_{BCK} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{BCK}}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \Big((v_{BCK}\ \rho)\ [\frac{v^2_{BCK}}{2}\ +\ \frac{1}{m}\ (V\ +\ V_{BCK})] \Big) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \Big(e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ [\sqrt{\rho}\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \Big) -$$

$$-\ 2\ \lambda\ \frac{\rho}{m}\ V_{BCK}\ -\ \rho\ v^2_{BCK}\ \lambda \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{BCK}}{\partial t}\ +\ \frac{\partial}{\partial x} \Big(v_{BCK}\ U_{BCK}\ +\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}\ \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ [\sqrt{\rho}\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -$$

$$-\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \Big)\ -\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t}\ =\ -\ \rho\ v^2_{BCK}\ \nu\ -\ 2\ \lambda\ \frac{\rho}{m}\ V_{BCK} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{BCK}}{\partial t}\ +\ \frac{\partial Q_{BCK}}{\partial x}\ -\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t}\ =$$

$$=\ -\ \lambda(2\ \frac{\rho}{m}\ V_{BCK}\ +\ J_{BCK}\ v_{BCK})\ , \qquad (1.2.3.22)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia de Bateman-Caldirola-Kanai**.

É importante observar que, embora o segundo membro da expressão (1.2.3.22) seja diferente de zero, isso não significa dizer que um sistema físico representado pela **equação de Bateman-Caldirola-Kanai** seja não-conservativo. Ele, na realidade, é conservativo pois, quando $t \rightarrow \infty$, v_{BCK} e V_{BCK} se anulam conforme indicam as expressões (1.2.3.6,9).

1.3. Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm de Sistemas Físicos Não-Conservativos

Neste item, estudaremos os sistemas físicos não-conservativos por intermédio de uma **equação de Schrödinger**

não-linear. Estudaremos, também, em que caso esses sistemas serão dissipativos.

1.3.1. Equação de Kostin

Em 1972,[9] M. D. Kostin propôs a seguinte **equação de Schrödinger não-linear** para representar os sistemas não-conservativos:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ [V(x,\ t)\ +\ \frac{\hbar\ \nu}{2\ i}\ \ell n\ \frac{\psi(x,\ t)}{\psi^*(x,\ t)}]\ \psi(x,\ t)\ , \qquad (1.3.1.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ e $V(x,\ t)$ representam como nos demais casos estudados, respectivamente, a função de onda e o potencial dependente do tempo do sistema físico em estudo, e ν representa uma constante.

Usando-se as expressões (1.2.2,3b,f) na expressão acima, virá (lembrar que $\ell n\ e^{2\ i\ S}\ =\ 2\ i\ S$):

$$i\,\hbar\ (i\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t})\ \psi\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [i\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2\ +\ 2\ \frac{i}{\phi}\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}]\ \psi\ +$$

$$+\ [V(x,\ t)\ +\ \frac{\hbar\ \nu}{2\ i}\ \ell n\ \frac{\phi\ e^{i\ S}}{\phi\ e^{-\ i\ S}}]\ \psi\quad \rightarrow$$

$$i\,\hbar\ (i\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t})\ \psi\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [i\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2\ +\ 2\ \frac{i}{\phi}\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}]\ \psi\ +$$

$$+\ [V(x,\ t)\ +\ \hbar\ \nu\ S]\ \psi\ . \qquad (1.3.1.2)$$

Em continuação, separando-se as partes imaginária e real da expressão acima, obteremos (é oportuno lembrar que ψ é fator comum):

a) <u>parte imaginária</u>

$$\frac{\hbar}{\phi}\,\frac{\partial \phi}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;+\; \frac{2}{\phi}\,\frac{\partial S}{\partial x}\,\frac{\partial \phi}{\partial x}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar}{2\ m}\,(\phi\,\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \;+\; 2\,\frac{\partial S}{\partial x}\,\frac{\partial \phi}{\partial x})\ , \qquad (1.3.1.3)$$

b) <u>parte real</u>

$$-\,\hbar\,\frac{\partial S}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,[\frac{1}{\phi}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \;-\; (\frac{\partial S}{\partial x})^2] \;+$$

$$+\;[V(x,\ t) \;+\; \hbar\,\nu\,S] \qquad \rightarrow$$

$$-\,\frac{\hbar}{m}\,\frac{\partial S}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2\ m^2}\,\frac{1}{\phi}\,[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \;-\; \phi\,(\frac{\partial S}{\partial x})^2] \;+$$

$$+\;\frac{1}{m}\,[V(x,\ t) \;+\; \hbar\,\nu\,S]\ . \qquad (1.3.1.4)$$

Vejamos, agora, qual a correlação entre as expressões (1.3.1.3-4) e as equações tradicionais da Dinâmica dos Fluidos. Examinando-se as expressões (1.3.1.3) e (1.2.1.5) verifica-se que são idênticas. Assim, seguindo-se o estudado no item 1.2.1. e considerando-se as expressões (1.2.1.7-8), a expressão (1.3.1.3) tomará o aspecto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;+\; \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x} \;=\; 0\ , \qquad (1.3.1.5)$$

expressão que representa a **equação da continuidade** ou **Lei de Conservação da Massa**. (Vide observação no final do item 1.1.) Observe-se que, como essa expressão é análoga às expressões (1.2.1.10), (1.2.2.5) e (1.2.3.7), ela representa,

também, a coerência do estado físico em questão e representado pela **equação de Kostin**.

Derivando-se a expressão (1.3.1.4) em relação à variável x, e considerando-se as expressões (1.2.1.7,8,11a), virá:

$$- \frac{\hbar}{m} \frac{\partial^2 S}{\partial x \, \partial t} = - \frac{\hbar^2}{2 \, m^2} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (\frac{\partial S}{\partial x})^2] + \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\hbar}{m} \nu \frac{\partial S}{\partial x} \rightarrow$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (- \frac{\hbar^2}{2 \, m} \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x})^2 + \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} + \nu \frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) = - \nu \, v_{qu} \, , \qquad (1.3.1.6a)$$

expressão essa análoga à **equação de Navier-Stokes**.[4] O sinal menos (-) do segundo membro dessa expressão indica que o sistema físico em consideração é dissipativo, conforme veremos mais adiante. Desse modo, a constante ν significa um **coeficiente de fricção**.

Por outro lado, partindo-se da expressão (1.3.1.4) e usando-se as expressões (1.2.1.8,11a), teremos:

$$- \hbar \frac{\partial S}{\partial t} = - (\frac{\hbar^2}{2 \, m \, \phi}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \, m \, (\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x})^2 +$$

$$+ [V(x, \, t) + \hbar \, \nu \, S] \rightarrow$$

$$\hbar \, (\frac{\partial S}{\partial t} + \nu \, S) + (\frac{1}{2} \, m \, v_{qu}^2 + V + V_{qu}) = 0 \, . \qquad (1.3.1.6b)$$

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos Reais, poderemos demonstrar as Leis de

Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica. (Vide observação no final do item 1.1.)[10] Portanto, para demonstrarmos a primeira dessas Leis, consideremos as expressões (1.2.1.14,16,18) e (1.3.1.5,6a). Assim, seguindo-se o que foi realizado no item 1.2.1., obteremos:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \ v_{qu}) = \rho \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \rho \ [- \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x}(V + V_{qu}) - \nu \ v_{qu}] +$$

$$+ v_{qu} \ [- \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu})] \quad \to \quad - \ \frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \ \rho \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} -$$

$$- \ v_{qu} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - \rho \ \nu \ v_{qu} \quad \to$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \ \frac{\partial}{\partial x}[(\rho \ v_{qu}) \ v_{qu}] - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - \rho \ \nu \ v_{qu} =$$

$$= - \ \frac{\partial}{\partial x}(\rho \ v_{qu}^2) - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - \rho \ \nu \ v_{qu} =$$

$$= - \ \frac{\partial}{\partial x}(\rho \ v_{qu}^2) - \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{4 \ m^2} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] - \rho \ \nu \ v_{qu} =$$

$$= - \ \frac{\partial}{\partial x} \ \Big(\ \rho \ v_{qu}^2 - \frac{\hbar^2}{4 \ m^2} \ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \ \Big) -$$

$$- \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} - \rho \ \nu \ v_{qu} \quad \to$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} + \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} = - \ \nu \ J_{qu} \ , \qquad (1.3.1.7)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear Quântico**.

Em seguida, demonstraremos a Lei de Conservação da Energia Quântica. Desse modo, levando-se em consideração as expressões (1.2.1.11b,14,20,23b,25) e (1.3.1.5,6a) e seguindo-se o item 1.2., resultará [lembrar que $V(x, \ t)$]:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; = \; \rho \; v_{qu} \; \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \; + \; \frac{v_{qu}^2}{2} \; \frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \frac{V}{m} \; \frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; + \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \; +$$

$$+ \; \frac{V_{qu}}{m} \; \frac{\partial \rho}{\partial t} \; = \; \rho \; v_{qu} \; [- \; v_{qu} \; \frac{\partial v}{\partial x} \; - \; \frac{1}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (V \; + \; V_{qu}) \; - \; \nu \; v_{qu}] \; +$$

$$+ \; \frac{v_{qu}^2}{2} \; [- \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\rho \; v_{qu})] \; + \; \frac{V}{m} \; [- \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\rho \; v_{qu})] \; +$$

$$+ \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; + \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \; + \; \frac{V_{qu}}{m} \; [- \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\rho \; v_{qu})] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; = \; - \; \rho \; v_{qu} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\frac{v_{qu}^2}{2}) \; - \; \frac{\rho \; v_{qu}}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (V \; + \; V_{qu})] \; -$$

$$- \; \frac{v_{qu}^2}{2} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\rho \; v_{qu}) \; - \; \frac{V}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\rho \; v_{qu}) \; + \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; -$$

$$- \; \frac{\rho \; \hbar^2}{2 \; m^2} \; \frac{\partial}{\partial t} \; (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \; \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) \; - \; \frac{V_{qu}}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\rho \; v_{qu}) \; - \; \rho \; v_{qu}^2 \; \nu \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; = \; - \; \frac{\partial}{\partial x} \; [\rho \; v_{qu} \; (\frac{v_{qu}^2}{2} \; + \; \frac{V}{m} \; + \; \frac{V_{qu}}{m})] \; -$$

$$+ \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; - \; \frac{\rho \; \hbar^2}{2 \; m^2} \; \frac{\partial}{\partial t} \; (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \; \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) \; - \; \rho \; v_{qu}^2 \; \nu \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; + \; \frac{\partial}{\partial x} \; \Big(\; v_{qu} \; U_{qu} \; + \; \frac{\hbar^2}{2 \; m^2} \; [\sqrt{\rho} \; \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \; -$$

$$- \; \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \; \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \; \Big) \; - \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; = \; - \; \rho \; v_{qu}^2 \; \nu \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; + \; \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} \; - \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; = \; - \; \nu \; J_{qu} \; v_{qu} \; , \qquad (1.3.1.8)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia Quântica**. Observe-se que a presença do sinal menos (-) no segundo membro da expressão acima indica que a **equação de Kostin** (que é uma **equação de Schrödinger não-linear**)

para um potencial geral $V(x,\ t)$ representa sistemas físicos dissipativos.[11]

1.3.2. Equação de Schuch-Chung-Hartmann

Em 1983-1985,[12] D. Schuch, K. M. Chung e H. Hartmann propuseram a seguinte **equação de Schrödinger não-linear** para representar os sistemas não-conservativos:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +\ \Big(\ V(x,\ t)\ +$$

$$+\ \frac{\hbar\ \nu}{i}\ [\ell n\ \psi(x,\ t)\ -\ <\ell n\ \psi(x,\ t)>]\ \Big)\ \psi(x,\ t)\ , \qquad (1.3.2.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ e $V(x,\ t)$ representam, como nos casos anteriores, respectivamente, a função de onda e o potencial dependente do tempo do sistema físico em questão, e ν é uma constante.

Consideremos a expressão (1.3.2.1). Assim, usando-se na mesma as expressões (1.2.1.3b,f), virá (lembrar que $\ell n\ e^{i\ S}\ =\ i\ S$):

$$i\,\hbar\ (i\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t})\ \psi\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [i\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2\ +\ 2\ \frac{i}{\phi}\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}]\ \psi\ +$$

$$+\ \Big(\ V(x,\ t)\ +\ \frac{\hbar\ \nu}{i}\ [\ell n\ (\phi\ e^{i\ S})\ -\ <\ell n\ (\phi\ e^{i\ S})>]\ \Big)\ \psi\quad \rightarrow$$

$$i\,\hbar\ (i\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t})\ \psi\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [i\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -$$

$$-\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2\ +\ 2\ \frac{i}{\phi}\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}]\ \psi\ +\ \Big(\ V(x,\ t)\ -\ i\,\hbar\ \nu\ [\ell n\ \phi\ +$$

$$+\ i\ S\ -\ <\ell n\ \phi>\ -\ i\ <S>]\ \Big)\ \psi\ . \qquad (1.3.2.2)$$

Separando-se as partes imaginária e real da expressão acima e usando-se a expressão (1.2.2), virá (lembrar que ψ é fator comum):

a) parte imaginária

$$\frac{\hbar}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \ + \ \frac{2}{\phi}\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}) \ -$$

$$- \ \hbar\ \nu\ (\ell n\ \phi - \ < \ell n\ \phi >)\ , \qquad (1.3.2.3)$$

b) parte real

$$- \ \hbar\ \frac{\partial S}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \ - \ (\frac{\partial S}{\partial x})^2] \ +$$

$$+ \ V(x,\ t) \ + \ \hbar\ \nu\ (S - \ < S >)\ . \qquad (1.3.2.4)$$

Considerando-se as expressões (1.2.1.7-9), a expressão (1.3.2.3) tomará a seguinte forma [é oportuno lembrar que $\frac{\partial}{\partial v}\ (\ell n\ u) \ = \ \frac{1}{u}\ \frac{\partial\ u}{\partial v}$ e $\ell n\ (u^n) \ = \ n\ \ell n\ u$]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (2\ \ell n\ \phi) \ =$$

$$= \ - \ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \ + \ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (2\ \ell n\ \phi)] \ - \ 2\ \nu\ (\ell n\ \phi - \ < \ell n\ \phi >) \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\ell n\ \phi^2) \ =$$

$$= \ - \ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \ + \ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \phi^2)] \ - \ 2\ \nu\ (\ell n\ \phi - \ < \ell n\ \phi >) \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\ell n\ \rho) \ =$$

$$= \ - \ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \rho)] - 2\ \nu\ (\ell n\ \sqrt{\rho} - \ < \ell n\ \sqrt{\rho} >) \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; =$$

$$= \; - \; \frac{\hbar}{m} \; (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \; + \; \frac{\partial S}{\partial x} \, \frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial x}) \; - \; \nu \; (\ell n \; \rho - \; < \ell n \; \rho >) \; =$$

$$= \; - \; \frac{\partial}{\partial x} \, [\frac{\hbar}{m} \, (\frac{\partial S}{\partial x})] - \frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \; \rho}{\partial x} \, [\frac{\hbar}{m} \, (\frac{\partial S}{\partial x})] - \nu \, (\ell n \, \rho - \; < \ell n \, \rho >) \; \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; + \; \frac{v_{qu}}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial x} \; = \; - \; \nu \; (\ell n \; \rho - \; < \ell n \; \rho >) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \rho \; \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; + \; v_{qu} \, \frac{\partial \rho}{\partial x} \; = \; - \; \nu \; \rho \; (\ell n \; \rho - \; < \ell n \; \rho >) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \frac{\partial (\rho \; v_{qu})}{\partial x} \; = \; - \; \nu \; \rho \; (\ell n \; \rho - \; < \ell n \; \rho >) \; . \qquad (1.3.2.5)$$

Observe-se que a presença do segundo membro na expressão acima indica que há descoerência do sistema físico representado pela **equação de Schuch-Chung-Hartmann**.

Derivando-se a expressão (1.3.2.4) em relação à variável x, e usando-se as expressões (1.2.1.8,11a), virá:

$$- \; \hbar \; \frac{\partial^2 S}{\partial x \; \partial t} \; = \; - \; \frac{\hbar^2}{2 \; m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; [\frac{1}{\phi} \; \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \; - \; (\frac{\partial S}{\partial x})^2] \; +$$

$$+ \; \frac{\partial V}{\partial x} \; + \; \hbar \; \nu \; (\frac{\partial S}{\partial x} \; - \; \frac{\partial < S >}{\partial x}) \quad \rightarrow$$

$$- \; \frac{\partial}{\partial t} \; (\frac{\hbar}{m} \; \frac{\partial S}{\partial x}) \; = \; \frac{1}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (- \; \frac{\hbar^2}{2 \; m} \; \frac{1}{\phi} \; \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (\frac{\hbar}{m} \; \frac{\partial S}{\partial x})^2 \; + \; \frac{1}{m} \; \frac{\partial V}{\partial x} \; + \; \nu \; (\frac{\hbar}{m} \; \frac{\partial S}{\partial x} \; - \; \frac{\hbar}{m} \; \frac{\partial < S >}{\partial x}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \; + \; v_{qu} \; \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; + \; \frac{1}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (V \; + \; V_{qu}) \; = \; - \; \nu \; v_{qu} \; , \qquad (1.3.2.6)$$

uma vez que, sendo:

$$< f(x, \; t) > \; = \; \int_{- \, \infty}^{\infty} \rho(x, \; t) \; f(x, \; t) \; dx \equiv g(t) \; , \qquad (1.3.2.7)$$

então:

$$\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,\ t)\ S(x,\ t)\ dx \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial x} = \frac{\partial g(t)}{\partial x} = 0\ . \qquad (1.3.2.8)$$

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos Reais, poderemos demonstrar as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica. (Vide observação no final do item 1.1.) Desse modo, para demonstrarmos a primeira dessas Leis, consideremos as expressões (1.2.1.14,16,18) e (1.3.2.5-6). Assim, seguindo-se o que foi realizado no item 1.2., obteremos:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ (\rho\ v_{qu}) = \rho\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu}\ \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \rho\ [-\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}(V + V_{qu}) - \nu\ v_{qu}] +$$

$$+\ v_{qu}\ [-\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu}) - \nu\ \rho\ (\ell n\ \rho - <\ell n\ \rho>)] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = -\ \rho\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - v_{qu}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ v_{qu}) - \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} -$$

$$-\ \rho\ v_{qu}\ \nu - \rho\ v_{qu}\ \nu\ (\ell n\ \rho - <\ell n\ \rho>) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = -\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho\ v_{qu}^2) - \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} -$$

$$-\ \rho\ v_{qu}\ \nu\ [1 + (\ell n\ \rho - <\ell n\ \rho>)] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = -\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ \rho\ v_{qu}^2 - \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2]\ \Big) -$$

$$-\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} - \rho\ v_{qu}\ \nu\ [1 + (\ell n\ \rho - <\ell n\ \rho>) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \ + \ \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} \ + \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} \ =$$

$$= \ - \ \nu \ J_{qu} \ [1 \ + \ (\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho >)] \ , \qquad (1.3.2.9)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear Quântico**.

Em seqüência, demonstraremos a Lei de Conservação da Energia Quântica. Portanto, levnado-se em consideração as expressões (1.2.1.11b,14,20,23b,25) e (1.3.2.5-6), teremos:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \ = \ \rho \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ \frac{v_{qu}^2}{2} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \frac{V}{m} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ + \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \ +$$

$$+ \ \frac{V_{qu}}{m} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \ = \ \rho \ v_{qu} \ [- \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ - \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \ - \nu \ v_{qu}] \ +$$

$$+ \ \frac{v_{qu}^2}{2} \ [- \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) \ - \ \nu \ \rho \ (\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho >)] \ +$$

$$+ \ \frac{V}{m} \ [- \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) \ - \ \nu \ \rho \ (\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho >)] \ +$$

$$+ \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ + \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \ + \ \frac{V_{qu}}{m} \ [- \ \frac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ -$$

$$- \ \nu \ \rho \ (\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho >)] \ \ \rightarrow \ \ \frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \ = \ - \ \rho \ v_{qu} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{v_{qu}^2}{2}) \ -$$

$$- \ \frac{\rho \ v_{qu}}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \ - \ \frac{v_{qu}^2}{2} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) \ - \ \frac{V}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) \ -$$

$$+ \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ - \ \frac{\rho \ \hbar^2}{2 \ m^2} \ \frac{\partial}{\partial t} \ (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) \ - \ \frac{V_{qu}}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ v_{qu}) \ -$$

$$- \ \rho \ v_{qu}^2 \ \nu \ - \ \nu \ \rho \ (\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho >) \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m}) \ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\rho \ v_{qu} \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m})] \ -$$

$$+ \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\rho\, \hbar^2}{2\ m^2} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) -$$

$$- \rho\, v_{qu}^2\, \nu - \nu\, \rho\, (\ell n\ \rho - < \ell n\ \rho >)\, (\frac{v_{qu}^2}{2} + \frac{V}{m} + \frac{V_{qu}}{m}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Big(v_{qu}\, U_{qu} + \frac{\hbar^2}{2\ m^2} [\sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) - \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \Big) -$$

$$- \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} = - \rho\, v_{qu}^2\, \nu - \nu\, \rho\, (\ell n\ \rho - < \ell n\ \rho >)\, (\frac{v_{qu}^2}{2} +$$

$$+ \frac{V}{m} + \frac{V_{qu}}{m}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} =$$

$$= - \nu\, [J_{qu}\, v_{qu} + (\ell n\ \rho - < \ell n\ \rho >)\, U_{qu}]\,, \qquad (1.3.2.10)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia Quântica**. Note-se que o segundo membro da expressão (1.3.2.10) não é estritamente negativo. Portanto, poderemos afirmar que a **equação de Schuch-Chung-Hartmann** (que nada mais é do que uma **equação de Schrödinger não-linear**) para um potencial geral $V(x,\ t)$ representa tão-somente sistemas físicos não-conservativos.

1.3.3. Equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar

Em 1973,[13] D. Süssmann e em 1975, R. W. Hasse,[14] K. Albrecht,[15] e M. D. Kostin,[16] apresentaram novas **equações de Schrödinger não-lineares** para representar os sistemas não-conservativos. Em 1986,[17] A. B. Nassar apresentou uma equação mais geral que as engloba, com o seguinte aspecto:

$$i\, \hbar \frac{\partial}{\partial t}\, \psi(x,\ t) = - \frac{\hbar^2}{2\ m} \frac{\partial^2 \psi(x,\ t)}{\partial x^2} +$$

$$+ \Big[\; V(x, \; t) \; + \; \nu \; \Big(\; [x - \; < x >] \; [c \; \hat{p} \; +$$

$$+ \; (1 \; - \; c) < \hat{p} >] \; - \; \tfrac{1}{2} \; i \; \hbar \; c \; \Big) \; \Big] \; \psi(x, \; t) \; , \qquad (1.3.3.1)$$

onde $\hat{p}$ é o tradicional operador de momento linear, ou seja:

$$\hat{p} \; = \; - \; i \; \hbar \; \tfrac{\partial}{\partial x} \; , \qquad (1.3.3.2)$$

e c é uma constante, cujos casos particulares foram tratados por Süssmann ($c \; = \; 1$), Hasse ($c \; = \; \frac{1}{2}$), Albrecht e Kostin ($c \; = \; 0$).

Considerando-se $\psi(x, \; t)$ dado pela expressão (1.2.1.2) e usando-se as expressões (1.2.1.3b) e (1.3.3.2), resultará:

$$\hat{p} \; \psi \; = \; - \; i \; \hbar \; \tfrac{\partial}{\partial x} \; (\phi \; e^{i \; S}) \; = \; - \; i \; \hbar \; (\tfrac{1}{\phi} \; \tfrac{\partial \phi}{\partial x} \; + \; i \; \tfrac{\partial S}{\partial x}) \; \psi \quad \rightarrow$$

$$\hat{p} \; \psi \; = \; \hbar \; (\tfrac{\partial S}{\partial x} \; - \; \tfrac{i}{\phi} \; \tfrac{\partial \phi}{\partial x}) \; \psi \; . \qquad (1.3.3.3)$$

Inserindo-se as expressões (1.2.1.2,3a,e) e (1.3.3.3) na expressão (1.3.3.1), obteremos (lembrar que $e^{i \; S}$ é fator comum):

$$i \; \hbar \; (\tfrac{\partial \phi}{\partial t} \; + \; i \; \phi \; \tfrac{\partial S}{\partial t}) \; = \; - \; \tfrac{\hbar^2}{2 \; m} \; [\tfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \; +$$

$$+ \; 2 \; i \; \tfrac{\partial \phi}{\partial x} \; \tfrac{\partial S}{\partial x} \; + \; i \; \phi \; \tfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} \; - \; \phi \; (\tfrac{\partial S}{\partial x})^2] \; +$$

$$+ \Big[\; V(x, \; t) \; + \; \nu \; \Big(\; [x - \; < x >] \; [c \; \hbar \; (\tfrac{\partial S}{\partial x} \; - \; \tfrac{i}{\phi} \; \tfrac{\partial \phi}{\partial x}) \; +$$

$$+ \; (1 \; - \; c) \; < \hat{p} >] \; - \; \tfrac{1}{2} \; i \; \hbar \; c \; \Big) \; \Big] \; \phi \; . \qquad (1.3.3.4)$$

Agora, separemos as partes imaginária e real da expressão acima (1.3.3.4). Para isso, é oportuno lembrar que: $< \hat{p} > = \; m \; < \hat{v_{qu}} > = \; m \; < v_{qu} > =$ real. Portanto:

a) parte imaginária

$$\frac{\hbar}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ 2\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}\ \frac{\partial S}{\partial x})\ -$$

$$-\ \nu\ (x -\ < x >)\ c\ \frac{\hbar}{\phi}\ \frac{\partial \phi}{\partial x}\ -\ \frac{\nu}{2}\ \hbar\ c\ , \qquad (1.3.3.5)$$

b) <u>parte real</u>

$$-\ \hbar\ \frac{\partial S}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ [\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ -\ (\frac{\partial S}{\partial x})^2]\ +$$

$$+\ \nu\ (x -\ < x >)\ c\ \hbar\ \frac{\partial S}{\partial x}\ +\ V(x,\ t)\ -$$

$$-\ \nu\ (x -\ < x >)(1\ -\ c)\ m\ < v_{qu} > . \qquad (1.3.3.6)$$

Considerando-se a expressão (1.3.3.5) e usando-se na mesma as expressões (1.2.1.7-8), obteremos [é oportuno lembrar que $\frac{\partial}{\partial v}\ (\ell n\ u)\ =\ \frac{1}{u}\ \frac{\partial\ u}{\partial v}$ e $\ell n\ (u^n)\ =\ n\ \ell n\ u$]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (2\ \ell n\ \phi)\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (2\ \ell n\ \phi)]\ -$$

$$-\ \nu\ (x -\ < x >)\ c\ \frac{\partial}{\partial x}\ (2\ \ell n\ \phi)\ -\ \nu\ c\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\ell n\ \phi^2)\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \phi^2)]\ -$$

$$-\ \nu\ (x -\ < x >)\ c\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \phi^2)\ -\ \nu\ c\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\ell n\ \rho)\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \rho)]\ -$$

$$-\ \nu\ (x -\ < x >)\ c\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\ell n\ \rho)\ -\ \nu\ c\ \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar}{m}\ (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial S}{\partial x}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial x})\ -$$

$$-\ \nu\ (x -\ < x >)\ c\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ -\ \nu\ c\ \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial t}\;+\;\frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\;+\;\frac{v_{qu}}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\;=\;-\,\nu\,c\;-\;\nu\,c\,(x-\;<x>)\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\quad\rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\;+\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;=$$

$$=\;-\,\nu\,c\,\rho\;-\;\nu\,c\,(x-\;<x>)\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\,.\qquad(1.3.3.7)$$

Observe-se que a presença do segundo membro na expressão acima indica que há descoerência do sistema físico representado pela **equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar**.

Chamando-se:[17]

$$\vartheta_{qnc}\;=\;v_{qu}\;+\;\nu\,c\,(x-\;<x>)\;,\qquad(1.3.3.8a)$$

a **velocidade quântica não-conservativa**, e considerando-se que [vide expressões (1.3.2.7-8)]:

$$\frac{\partial\;<x>}{\partial x}\;=\;\frac{\partial\;<v_{qu}>}{\partial x}\;=\;0\;,\qquad(1.3.3.8b\text{-}c)$$

teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(\rho\,\vartheta_{qnc})\;=\;\frac{\partial}{\partial x}\Big(\,\rho\,[v_{qu}\;+\;\nu\,c\,(x-\;<x>)]\,\Big)\;=$$

$$=\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;+\;\frac{\partial}{\partial x}\,[\rho\,\nu\,c\,(x-\;<x>)]\;=\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;+$$

$$+\,\nu\,c\,(x-\;<x>)\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\;+\;\rho\,\nu\,c\,\frac{\partial}{\partial x}\,(x-\;<x>)\;=$$

$$=\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;+\;\nu\,c\,(x-\;<x>)\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\;+\;\nu\,c\,\rho\quad\rightarrow$$

$$-\,\nu\,c\,\rho\;-\;\nu\,c\,(x-\;<x>)\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\;=$$

$$=\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;-\;\frac{\partial(\rho\ \vartheta_{qnc})}{\partial x}\,.\qquad(1.3.3.9)$$

Considerando-se a expressão (1.3.3.7) e inserindo-se na mesma a expressão (1.3.3.9), resultará:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\ \vartheta_{qnc})}{\partial x} = 0\ . \qquad (1.3.3.10)$$

A expressão acima mostra que, em função da **velocidade quântica não-conservativa** (ϑ_{qnc}), há coerência do sistema físico representado pela **equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar**.

Derivando-se a expressão (1.3.3.6) em relação à variável x, e usando-se as expressões (1.2.1.8,11a) e (1.3.3.8a-c), virá:

$$-\ \hbar\ \frac{\partial^2 S}{\partial x\ \partial t} = -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (\frac{\partial S}{\partial x})^2] +$$

$$+\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\nu\ (x - <x>)\ c\ \hbar\ \frac{\partial S}{\partial x} +$$

$$+\ \nu\ (x - <x>)(1 - c)\ m\ <v_{qu}> + V(x,\ t)] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) - \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})^2 -$$

$$-\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\ \nu\ (x - <x>)\ c\ (\frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S}{\partial x})] -$$

$$-\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\nu\ (x - <x>)\ (1 - c)\ <v_{qu}>\ ] - \frac{1}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} = -\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (v_{qu}^2) - \frac{\partial}{\partial x}\ [\nu\ c\ v_{qu}\ (x - <x>)] -$$

$$-\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\nu\ (x - <x>)\ (1 - c)\ <v_{qu}>\ ] - \frac{1}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + v_{qu}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\nu\ c\ (x - <x>)] +$$

$$+\ \nu\ c\ (x - <x>)\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} +$$

$$+ \nu \ (1 \ - \ c) \ < v_{qu} > \ \frac{\partial}{\partial x} \ (x - \ < x >) \ =$$

$$= \ - \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ [v_{qu} \ + \ \nu \ c \ (x - \ < x >)] \ +$$

$$+ \ [\nu \ v_{qu} \ c \ + \ \nu \ (1 \ - \ c) \ < v_{qu} >] \ \frac{\partial}{\partial x} \ (x - \ < x >) \ =$$

$$= \ - \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ \vartheta_{qnc} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ + \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \ =$$

$$= \ - \ \nu \ [c \ v_{qu} \ + \ (1 \ - \ c) \ < v_{qu} >] \ . \qquad (1.3.3.11)$$

Tomando-se a expressão (1.3.3.8a), poderemos escrever que (é interessante lembrar que $< >$ é uma operação linear, que $< v_{qu} > = \frac{\partial < x >}{\partial t}$ e que, sendo x e t variáveis independentes, então $\frac{\partial x}{\partial t} \ = \ 0$):

$$< \vartheta_{qnc} > = < v_{qu} > \ + \nu \ c \ (< x > \ - \ < x >) \quad \rightarrow$$

$$< \vartheta_{qnc} > = < v_{qu} > \ , \qquad (1.3.3.12a)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} \ = \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ \nu \ c \ (\frac{\partial x}{\partial t} \ - \ \frac{\partial < x >}{\partial t}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ = \ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} \ + \ \nu \ c \ < v_{qu} > =$$

$$= \ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} \ + \ \nu \ c \ < \vartheta_{qnc} > \ , \qquad (1.3.3.12b)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} \ = \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ + \ \nu \ c \ \frac{\partial}{\partial x} \ (x - \ < x >) \ =$$

$$= \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \nu\ c \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} - \nu\ c\ . \qquad (1.3.3.12c)$$

Substituindo-se as expressões (1.3.3.12a-c) na expressão (1.3.3.11), resultará:

$$\frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} + \nu\ c\ < \vartheta_{qnc} > +$$

$$+ \vartheta_{qnc}\ (\frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} - \nu\ c) + \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V + V_{qu}) =$$

$$= - \nu\ [c\ v_{qu} + (1 - c)\ < \vartheta_{qnc} >] =$$

$$= - \nu\ c\ v_{qu} - \nu\ < \vartheta_{qnc} > + \nu\ c\ < \vartheta_{qnc} > \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} + \nu\ c\ < \vartheta_{qnc} > +$$

$$+ \vartheta_{qnc}\ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} - \vartheta_{qnc}\ \nu\ c + \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V + V_{qu}) =$$

$$= - \nu\ c\ v_{qu} - \nu\ < \vartheta_{qnc} > + \nu\ c\ < \vartheta_{qnc} > \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} + \vartheta_{qnc}\ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} + \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V + V_{qu}) =$$

$$= - \nu\ [c\ (v_{qu} - \vartheta_{qnc}) + < \vartheta_{qnc} >]\ . \qquad (1.3.3.13)$$

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos, poderemos demonstrar as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico Não-Conservativo e da Energia Quântica Não-Conservativa. (Vide observação no final do item 1.1.) Contudo, em virtude da expressão (1.3.3.8a), as expressões (1.2.1.14,18,20,25) serão generalizadas para:

$$J_{qnc} = \rho\ \vartheta_{qnc}\ , \qquad (1.3.3.14a)$$

$$P_{qnc} = \rho\ \vartheta_{qnc}^2 - \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2]\ , \qquad (1.3.3.14b)$$

$$U_{qnc} \ = \ \rho \, [\frac{\vartheta_{qnc}^2}{2} \ + \ \frac{1}{m} \, (V \ + \ V_{qu})] \ , \qquad (1.3.3.14c)$$

$$Q_{qnc} \ = \ \vartheta_{qnc} \, U_{qnc} \, +$$

$$+ \ \frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \, [\sqrt{\rho} \ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \ - \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \ , \qquad (1.3.3.14d)$$

que representam, respectivamente, a **densidade de momento linear quântico não-conservativo** J_{qnc}, o **fluxo de densidade de momento linear quântico não-conservativo** P_{qnc}, a **densidade de energia quântica não-conservativa** U_{qnc}, e o **fluxo da densidade de energia quântica não-conservativa** Q_{qnc}. Nessas expressões, ρ, V_{qu} e ϑ_{qnc} são dados, respectivamente, pelas expressões (1.2.1.7,11a-b) e (1.3.3.8a).

Assim, para demonstrarmos a primeira daquelas Leis, consideremos as expressões (1.2.1.16) e (1.3.3.10,13,14a-b). Assim, seguindo-se o que foi realizado no item 1.2., virá:

$$\frac{\partial J_{qnc}}{\partial t} \ = \ \frac{\partial}{\partial t} \, (\rho \ \vartheta_{qnc}) \ = \ \rho \ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} \ + \ \vartheta_{qnc} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \ =$$

$$= \ \rho \ \Big(- \ \vartheta_{qnc} \ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} \ - \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x}(V \ + \ V_{qu}) \ -$$

$$- \ \nu \ [c \ (v_{qu} \ - \ \vartheta_{qnc}) + \ < \vartheta_{qnc} > \ \Big) \ + \ \vartheta_{qnc} \ [- \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ \vartheta_{qnc})] \ =$$

$$= \ - \ \rho \ \vartheta_{qnc} \ \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} \ - \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \ -$$

$$- \ \rho \ \nu \ [c \ (v_{qu} \ - \ \vartheta_{qnc}) + < \vartheta_{qnc} >] \ - \ \vartheta_{qnc} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ \vartheta_{qnc})] \ =$$

$$= \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\rho \ \vartheta_{qnc}^2) \ + \ \frac{\hbar^2}{4 \ m^2} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ - \ \frac{1}{\rho} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \ - \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial x} \ -$$

$$- \ \rho \ \nu \ [c \ (v_{qu} \ - \ \vartheta_{qnc}) + \ < \vartheta_{qnc} >] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qnc}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Big(\rho\, \vartheta^2_{qnc} - \frac{\hbar^2}{4\, m^2}\, [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\, (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \Big) +$$

$$+ \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V}{\partial x} = -\, \nu\, [c\, (\rho\, v_{qu} - \rho\, \vartheta_{qnc}) + \rho\, < \vartheta_{qnc} >] \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qnc}}{\partial t} + \frac{\partial P_{qnc}}{\partial x} + \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V}{\partial x} =$$

$$= -\, \nu\, [c\, (J_{qu} - J_{qnc}) + \rho\, < \vartheta_{qnc} >]\, , \qquad (1.3.3.15)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear Quântico Não-Conservativo**.

Em seguida, demonstraremos a Lei de Conservação da Energia Quântica Não-Conservativa. Usando-se as expressões (1.2.1.11b,23b) e (1.3.3.8a,10,13,14a-d), teremos:

$$\frac{\partial U_{qnc}}{\partial t} = \rho\, \vartheta_{qnc}\, \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial t} + \frac{\vartheta^2_{qnc}}{2}\, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{V}{m}\, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{V_{qu}}{m}\, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\, \vartheta_{qnc} \Big(-\, \vartheta_{qnc}\, \frac{\partial \vartheta_{qnc}}{\partial x} - \frac{1}{m}\, \frac{\partial}{\partial x}\, (V + V_{qu}) -$$

$$-\, \nu\, [c(v_{qu} - \vartheta_{qnc}) + < \vartheta_{qnc} >] \Big) +$$

$$+ \frac{\vartheta^2_{qnc}}{2}\, [-\, \frac{\partial}{\partial x}\, (\rho\, \vartheta_{qnc})] + \frac{V}{m}\, [-\, \frac{\partial}{\partial x}\, (\rho\, \vartheta_{qnc})] +$$

$$+ \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} + \frac{V_{qu}}{m}\, [-\, \frac{\partial}{\partial x}\, (\rho\, \vartheta_{qnc})] \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qnc}}{\partial t} = -\, \rho\, \vartheta_{qnc}\, \frac{\partial}{\partial x}\, (\frac{\vartheta^2_{qnc}}{2}) - \frac{\rho\, \vartheta_{qnc}}{m}\, \frac{\partial}{\partial x}\, (V + V_{qu})] -$$

$$-\, \rho\, \vartheta_{qnc}\, \nu\, [c\, (v_{qu} - \vartheta_{qnc}) + < \vartheta_{qnc} >] -$$

$$-\, \frac{\vartheta^2_{qnc}}{2}\, \frac{\partial}{\partial x}\, (\rho\, \vartheta_{qnc}) - \frac{V}{m}\, \frac{\partial}{\partial x}\, (\rho\, \vartheta_{qnc}) + \frac{\rho}{m}\, \frac{\partial V}{\partial t} -$$

$$- \frac{\rho\ \hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ -\ \frac{V_{qu}}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\rho\ \vartheta_{qnc}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qnc}}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\rho\ \vartheta_{qnc}\ (\frac{\vartheta_{qnc}^2}{2}\ +\ \frac{V}{m}\ +\ \frac{V_{qu}}{m})]\ -$$

$$+\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t}\ -\ \frac{\rho\ \hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2})\ -$$

$$-\ \rho\ \vartheta_{qnc}\ \nu\ [c\ (v_{qu}\ -\ \vartheta_{qnc})\ +\ <\vartheta_{qnc}>] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qnc}}{\partial t}\ +\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\vartheta_{qnc}\ U_{qnc}\ +\ \frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ [\sqrt{\rho}\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t})\ -$$

$$-\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}\ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}]\Big)\ -\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t}\ =$$

$$=\ -\ \rho\ \vartheta_{qnc}\ \nu\ [c\ (v_{qu}\ -\ \vartheta_{qnc})\ +\ <\vartheta_{qnc}>] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qnc}}{\partial t}\ +\ \frac{\partial Q_{qnc}}{\partial x}\ -\ \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t}\ =$$

$$=\ -\ J_{qnc}\ \nu\ [c\ (v_{qu}\ -\ \vartheta_{qnc})\ +\ <\vartheta_{qnc}>]\ , \qquad (1.3.3.16)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia Quântica Não-Conservativa**. Observe-se que o segundo membro da expressão acima não é estritamente negativo. Assim, afirmaremos que a **equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar** (que é uma **equação de Schrödinger não-linear**) para um potencial geral $V(x,\ t)$ somente representa sistemas físicos não-conservativos.

1.3.4. Equação de Diósi-Halliwell

Em 1998,[18] Lajos Diósi e Jonathan J. Halliwell apresentaram uma nova **equação de Schrödinger não-linear** para representar os sistemas físicos dependentes do tempo:

$$i\ \hbar\ \frac{\partial}{\partial t}\ \psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2 \psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +\ \Big(\ V(x,\ t)\ -$$

$$- i \hbar \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - <x>)}{a} \Big] \Big) \psi(x, \ t) \ , \qquad (1.3.4.1)$$

onde $\psi(x, \ t)$ e $V(x, \ t)$ representam, respectivamente, a função de onda e o potencial dependente do tempo do sistema físico em estudo, e a é uma constante.

Inserindo-se as expressões (1.2.1.2,3a,e) na expressão (1.3.4.1), obteremos (lembrar que $e^{i \ S}$ é fator comum):

$$i \hbar \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + i \ \phi \ \frac{\partial S}{\partial t}\right) = - \frac{\hbar^2}{2 \ m} \Big[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} +$$

$$+ 2 \ i \ \frac{\partial \phi}{\partial x} \ \frac{\partial S}{\partial x} + i \ \phi \ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \phi \ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\Big] + \Big(V(x, \ t) -$$

$$- i \hbar \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - <x>)}{a} \Big] \Big) \phi \ . \qquad (1.3.4.2)$$

Separando-se as partes imaginária e real da expressão acima, resultará:

a) parte imaginária

$$\frac{\hbar}{\phi} \ \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2 \ m} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2 \ \frac{1}{\phi} \ \frac{\partial \phi}{\partial x} \ \frac{\partial S}{\partial x}\right) -$$

$$- \hbar \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - <x>)}{a} \Big] \ . \qquad (1.3.4.3)$$

b) parte real

$$- \hbar \ \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2 \ m} \Big[\frac{1}{\phi} \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\Big] + V(x, \ t) \ . \qquad (1.3.4.4)$$

Considerando-se a expressão (1.3.4.3) e usando-se na mesma as expressões (1.2.1.7-8), obteremos [é oportuno lembrar que $\frac{\partial}{\partial v} \ (\ell n \ u) = \frac{1}{u} \ \frac{\partial \ u}{\partial v}$ e $\ell n \ (u^n) = n \ \ell n \ u$]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ (2 \ \ell n \ \phi) = - \frac{\hbar}{m} \Big[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (2 \ \ell n \ \phi)\Big] -$$

$$- 2 \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \, (\ell n \; \phi^2) \; = \; - \, \frac{\hbar}{m} \, [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \; + \; \frac{\partial S}{\partial x} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\ell n \; \phi^2)] \, -$$

$$- 2 \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \, (\ell n \; \rho) \; = \; - \, \frac{\hbar}{m} \, [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \; + \; \frac{\partial S}{\partial x} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\ell n \; \rho)] \, -$$

$$- 2 \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; = \; - \, \frac{\hbar}{m} \, [\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \; + \; \frac{1}{\rho} \, \frac{\partial S}{\partial x} \, \frac{\partial \rho}{\partial x}] \, -$$

$$- 2 \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; = \; - \, \frac{\partial}{\partial x} \, (\frac{\hbar}{m} \, \frac{\partial S}{\partial x}) \; - \; \frac{1}{\rho} \, (\frac{\hbar}{m} \, \frac{\partial S}{\partial x}) \, \frac{\partial \rho}{\partial x} \, -$$

$$- 2 \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; + \; \frac{v_{qu}}{\rho} \, \frac{\partial \rho}{\partial x} \; =$$

$$= \; - 2 \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \rho \, \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; + \; v_{qu} \, \frac{\partial \rho}{\partial x} \; =$$

$$= \; - 2 \, \rho \, \hbar \left[\; \frac{(x \, - \, <x>)^2}{a^2} \; - \; \frac{\eta(t) \; (x \, - \, <x>)}{a} \; \right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \; + \; \frac{\partial (\rho \; v_{qu})}{\partial x} \; =$$

$$= - 2 \rho \hbar \left[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - <x>)}{a} \right] , \qquad (1.3.4.5)$$

expressão que mostra a <u>descoerência</u> do sistema físico representado pela **equação de Diósi-Halliwell**.

Derivando-se a expressão (1.3.4.4) em relação à variável x, e usando-se as expressões (1.2.1.8,11a), virá [lembrar que $V(x, \ t)$]:

$$- \hbar \frac{\partial^2 S}{\partial x \ \partial t} = - \frac{\hbar^2}{2 \ m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial V}{\partial x} \quad \to$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar^2}{2 \ m} \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \to$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_{qu}^2}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\hbar^2}{2 \ m} \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \to$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) = 0 \, . \qquad (1.3.4.6)$$

Agora, continuando a analogia da $MQBB$ com a Mecânica dos Fluidos, poderemos demonstrar as Leis de Conservação do Momento Linear Quântico e da Energia Quântica. (Vide observação no final do item 1.1.) Desse modo, para demonstrarmos a primeira dessas Leis, consideremos as expressões (1.2.1.14,16,18) e (1.3.4.5-6). Assim, seguindo-se o que foi realizado no item 1.2.1., obteremos:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \ v_{qu}) = \rho \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \rho \left[- v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) \right] +$$

$$+ v_{qu} \left(- \frac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} - 2 \rho \hbar \left[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - <x>)}{a} \right] \right) \quad \to$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \rho \, v_{qu} \, \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - v_{qu} \, \frac{\partial (\rho \, v_{qu})}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} -$$

$$- 2 \, v_{qu} \, \rho \, \hbar \, \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \, (x - <x>)}{a} \Big] \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \, v_{qu}^2) - \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} -$$

$$- 2 \, v_{qu} \, \rho \, \hbar \, \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \, (x - <x>)}{a} \Big] \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \Big(\rho \, v_{qu}^2 - \frac{\hbar^2}{4 \, m^2} \, [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \, (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \Big) -$$

$$- \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \, v_{qu} \, \rho \, \hbar \, \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \, (x - <x>)}{a} \Big] \rightarrow$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} + \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial x} =$$

$$= - 2 \, J_{qu} \, \hbar \, \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \, (x - <x>)}{a} \Big] , \qquad (1.3.4.7)$$

que representa a **Lei de Conservação do Momento Linear Quântico**.

Em continuação, demonstraremos a Lei de Conservação da Energia Quântica. Assim, levando-se em consideração as expressões (1.2.1.11b,14,20,23b,25) e (1.3.4.5-6), teremos:

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} = \rho \, v_{qu} \, \frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + \frac{v_{qu}^2}{2} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{V}{m} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \, \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{V_{qu}}{m} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \, v_{qu} \, [- v_{qu} \, \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{1}{m} \, \frac{\partial}{\partial x} \, (V + V_{qu})] +$$

$$+ \frac{v_{qu}^2}{2} \Big(- \frac{\partial (\rho \, v_{qu})}{\partial x} - 2 \, \rho \, \hbar \, \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \, (x - <x>)}{a} \Big] \Big) +$$

$$+ \frac{V}{m} \Big(- \frac{\partial (\rho \, v_{qu})}{\partial x} - 2 \, \rho \, \hbar \, \Big[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \, (x - <x>)}{a} \Big] \Big) +$$

$$+ \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ + \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \ + \ \frac{V_{qu}}{m} \ \Big(\ - \ \frac{\partial(\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ -$$

$$- \ 2 \ \rho \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x \ - \ <x>)^2}{a^2} \ - \ \frac{\eta(t) \ (x \ - \ <x>)}{a} \ \Big] \ \Big) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \ = \ - \ \rho \ v_{qu} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{v_{qu}^2}{2}) \ -$$

$$- \ \frac{\rho \ v_{qu}}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \ - \ \frac{v_{qu}^2}{2} \ \frac{\partial(\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ - \ \frac{V}{m} \ \frac{\partial(\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ +$$

$$+ \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ + \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V_{qu}}{\partial t} \ - \ \frac{V_{qu}}{m} \ \frac{\partial(\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ -$$

$$- \ 2 \ \rho \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x \ - \ <x>)^2}{a^2} \ - \ \frac{\eta(t) \ (x \ - \ <x>)}{a} \ \Big] \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m}) \ =$$

$$= \ - \ \rho \ v_{qu} \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m}) \ - \ \frac{\partial(\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m}) \ +$$

$$+ \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \ \Big(\ \frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ [\sqrt{\rho} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \ - \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \ \Big) \ -$$

$$- \ 2 \ \rho \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x \ - \ <x>)^2}{a^2} \ - \ \frac{\eta(t) \ (x \ - \ <x>)}{a} \ \Big] \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\rho \ v_{qu} \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m})] \ -$$

$$+ \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \ \Big(\ \frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ [\sqrt{\rho} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \ - \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \ \Big) \ -$$

$$- \ 2 \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x \ - \ <x>)^2}{a^2} \ - \ \frac{\eta(t) \ (x \ - \ <x>)}{a} \ \Big] \ \rho \ (\frac{v_{qu}^2}{2} \ + \ \frac{V}{m} \ + \ \frac{V_{qu}}{m}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \ + \ \frac{\partial}{\partial x} \ \Big(\ v_{qu} \ U_{qu} \ + \ \frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ [\sqrt{\rho} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \ - \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \ \Big) \ -$$

$$- \ \frac{\rho}{m} \ \frac{\partial V}{\partial t} \ = \ - \ 2 \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x \ - \ <x>)^2}{a^2} \ - \ \frac{\eta(t) \ (x \ - \ <x>)}{a} \ \Big] \ U_{qu} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} - \frac{\rho}{m} \frac{\partial V}{\partial t} =$$

$$= - 2 \hbar U_{qu} \left[\frac{(x - <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) (x - <x>)}{a} \right], \qquad (1.3.4.8)$$

que representa a **Lei de Conservação da Energia Quântica**. Note-se que o segundo membro da expressão acima não é estritamente negativo. Assim, afirmaremos que a **equação de Diósi-Halliwell** (que também é uma **equação de Schrödinger não-linear**) para um potencial geral $V(x, t)$ representa, desse modo, apenas sistemas físicos <u>não-conservativos</u>.

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. Para um estudo formal da *MQBB*, veja-se: HOLLAND, P. R. 1993. **The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics**, Cambridge University Press. Para um estudo crítico-filosófico dessa Mecânica, veja-se: JAMMER, M. 1974. **The Philosophy of Quantum Mechanics**, John Willey; FREIRE JUNIOR, O. 1999. **David Bohm e a Controvérsia dos Quanta**, *Coleção CLE*, Volume 27, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, UNICAMP.

2. MADELUNG, E. 1926. *Zeitschrift für Physik 40*, 322; BOHM, D. 1952. *Physical Review 85*, 166.

3. SCHRÖDINGER, E. 1926. *Annales de Physique Leipzig 81*, 109.

4. Veja-se qualquer texto de Mecânica dos Fluidos, por exemplo:

   . STREETER, V. L. and DEBLER, W. R. 1966. **Fluid Mechanics**, McGraw-Hill Book Company, Incorporation.

   . COIMBRA, A. L. 1967. **Mecânica dos Meios Contínuos**, Ao Livro Técnico S. A.

   . LANDAU, L. et LIFSHITZ, E. 1969. **Mécanique des Fluides**. Éditions Mir.

   . BASSALO, J. M. F. 1973. **Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos**, EDUFPA.

   . CATTANI, M. S. D. 1990. **Elementos de Mecânica dos Fluidos**, Edgard Blücher.

5. Esse potencial explica as características das **ondas quânticas debroglieanas**, tais como interferência e difração. Veja-se: BOHM, D. and HILEY, B. J. 1985. *Physics Review Letters 55*, 2511; BOHM, D., DEWDNEY, C. and HILEY, B. J. 1985. *Nature 315*, 294.

6. BIALYNICKI-BIRULA, I. and MYCIELSKI, J. 1976. *Annals of Physics (N.Y.) 100*, 62; —— 1979. *Physica Scripta 20*, 539.

7. BATEMAN, H. 1931. *Phyical Review 38*, 815; CALDIROLA, P. 1941. *Nuovo Cimento 18*, 393; KANAI, E. 1948. *Progress in Theoretical Physics 3*, 440.

8. Para um estudo mais detalhado sobre a **equação de Bateman-Caldirola-Kanai** representar sistemas físicos de massa variável, veja-se: BASSALO, J. M. F. 1989. **O Oscilador Harmônico**. *Tese de Professor Titular* (mimeo); RAY, J. R. 1979. *American Journal Physics 47*, 626; LEMOS, N. A. 1979. *American Journal Physics 47*, 857.

9. KOSTIN, M. D. 1972. *Journal of Chemical Physics 57*, 3539.

10. NASSAR, A. B. 1984a. *Physics Letters A106*, 43; —— 1984b. *Letters Nuovo Cimento 41*, 476; NASSAR, A. B., BASSALO, J. M. F., ALENCAR, P. T. S., SERRA, V. F., MAGNO, F. N. B., SOUZA, J. F. e OLIVEIRA, J. E. 2000. (Submetido ao *Physica Scripta.*)

11. Para verificar que os sistemas físicos dissipativos podem ser representados por uma **equação de Schrödinger não-linear**, veja-se: CALDEIRA, A. O. and LEGGETT, A. J. 1981. *Physical Review Letters 46*, 211; ——-. 1983. *Annals of Physics 149*, 374; ——-. 1985. *Physical Review A31*, 1059; ——-. 1987. *Reviews of Modern Physics 59*, 1.

12. SCHUCH, D., CHUNG, K. M. and HARTMANN, H. 1983. *Journal of Mathematical Physics 24*, 1652; —— 1984. *Journal of Mathematical Physics 25*, 3086; —— 1985. *Berichte Bunsenges. Phys. Chem. 89*, 589.

13. SÜSSMANN, D. 1973. *Seminar Talk at Los Alamos.*

14. HASSE, R. W. 1975. *Journal of Mathematical Physics 16*, 2005.

15. ALBRECHT, K. 1975. *Physics Letters B56*, 127.

16. KOSTIN, M. D. 1975. *Journal of Statistical Physics 12*, 146.

17. NASSAR, A. B. 1986a. *Journal of Mathematical Physics 27*, 2949.

18. DIÓSI, L. and HALLIWELL, J. J. 1998. *Physical Review Letters 81*, 2846.

CAPÍTULO 2

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

E OS INVARIANTES DE ERMAKOV-LEWIS

2.1. Introdução

Em 1967,[1] H. R. Lewis demonstrou que uma quantidade conservada para o oscilador harmônico dependente do tempo ($OHDT$), caracterizado pela freqüência $\omega(t)$, é dada por:

$$I \ = \ \tfrac{1}{2}[(\dot{q}\ \alpha \ - \ \dot{\alpha}\ q)^2 \ + \ (\tfrac{q}{\alpha})^2] \ , \qquad (2.1.0.1)$$

onde q e α satisfazem, respectivamente, as equações:

$$\ddot{q} \ + \ \omega^2(t)\ q \ = \ 0 \ , \qquad \ddot{\alpha} \ + \ \omega^2(t)\ \alpha \ = \ \tfrac{1}{\alpha^3} \ . \qquad (2.1.0.2\text{-}3)$$

Por outro lado, como as expressões (2.0.1.1-3) também já haviam sido obtidas por V. P. Ermakov, em 1880,[2] o problema de determinar os invariantes de sistemas físicos dependentes do tempo passou então a ser conhecido como o **problema de Ermakov-Lewis: PE-L**. Portanto, a solução desse problema e de suas generalizações tem sido objeto de estudo em diversos trabalhos realizados nos últimos trinta anos.[3]

Neste Capítulo, vamos procurar a existência ou não de invariantes do tipo Ermakov-Lewis, para os sistemas físicos estudados no Capítulo 1 e para o caso particular em que o potencial $V(x,\ t)$ usado nesse Capítulo, é o do oscilador harmônico dependente do tempo ($OHDT$) unidimensional, dado por:

$$V(x,\ t) \ = \ \tfrac{1}{2}\ m\ \omega^2(t)\ x^2 \ . \qquad (2.1.0.4)$$

2.2. Sistemas Físicos Conservativos

2.2.1. Equação de Schrödinger

Para o caso do $OHDT$, a **equação de Schrödinger** será escrita na forma [vide expressões (1.2.1.1) e (2.1.0.4)]:

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2\ \psi(x,\ t)}{\partial x^2}\;+$$

$$+\;\frac{1}{2}\,m\,\omega^2(t)\,x^2\,\psi(x,\ t)\ , \qquad (2.2.1.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ é a função de onda.

Considerando-se a **transformação de Madelung-Bohm**, isto é [vide expressão (1.2.1.2)]:

$$\psi(x,\ t)\;=\;\phi(x,\ t)\;e^{i\ S(x,\ t)}\ , \qquad (2.2.1.2)$$

e aplicando-a à expressão (2.2.1.1), vimos no Capítulo 1, para o caso geral de $V(x,\ t)$, que [vide expressões (1.2.1.10,13)]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\;+\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;=\;0\ , \qquad (2.2.1.3)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\;+\;v_{qu}\,\frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\;+\;\frac{1}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(V\;+\;V_{qu})\;=\;0\ , \qquad (2.2.1.4)$$

onde a **densidade de massa** $\rho(x,\ t)$, a **velocidade quântica** v_{qu} e o **potencial quântico** V_{qu} são dados, respectivamente, por [vide expressões (1.2.1.7,8,11a-b)]:

$$\rho(x,\ t)\;=\;\phi^2(x,\ t), \qquad v_{qu}\;=\;\frac{\hbar}{m}\,\frac{\partial S(x,\ t)}{\partial x}\ , \qquad (2.2.1.5\text{-}6)$$

$$V_{qu}(x,\ t)\equiv V_{qu}\;=\;-\,\left(\frac{\hbar^2}{2\ m\ \phi}\right)\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\;=$$

$$=\;-\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial x^2}\ . \qquad (2.2.1.7\text{a-b})$$

Considerando-se as expressões (2.1.0.4) e (2.2.1.4), virá:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \omega^2 x = - \frac{1}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} . \qquad (2.2.1.8)$$

Para integrarmos a expressão (2.2.1.8) consideraremos que o valor esperado da **força quântica** se anula para todos os tempos, isto é:[4]

$$< \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} > \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} |_{x = q(t)} , \qquad (2.2.1.9a\text{-}b)$$

$$< x > = q(t) . \qquad (2.2.1.9c)$$

Desse modo, podemos separar a expressão (2.2.1.8) nas expressões:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \omega^2 x = k(t) [x - q(t)] , \qquad (2.2.1.10)$$

e, usando-se a expressão (2.2.1.7b):

$$- \frac{1}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar^2}{2 m^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) =$$

$$= k(t) [x - q(t)] . \qquad (2.2.1.11)$$

Realizando-se a derivada indicada no segundo membro da expressão (2.2.1.11), virá:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar^2}{2 m^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) = \frac{\hbar^2}{2 m^2} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2 \sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial x})] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2} \frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{1}{\sqrt{\rho}} [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\sqrt{\rho}})] \Big) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{1}{2 \sqrt{\rho^3}} \frac{\partial \rho}{\partial x})] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\ -\ \frac{1}{2\ \rho^2}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\ -\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\ \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ -\ \frac{1}{2\ \rho^2}\ 2\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})\ -$$

$$-\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2\ (-\ \frac{2}{2})\ \frac{1}{\rho^3}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}]\ \ \longrightarrow\ \ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{\hbar^2}{2\ m^2}\ \frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\ -\ \frac{2}{\rho^2}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\rho^3}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^3]\ =$$

$$=\ k(t)\ [x\ -\ q(t)]\ . \qquad (2.2.1.12)$$

Para integrarmos a expressão (2.2.1.12), precisamos conhecer uma condição inicial para $\rho(x,\ t)$. Assim, admitiremos inicialmente que o sistema físico considerado seja representado por um pacote de onda gaussiano normalizado e centrado em $q(0)$, ou seja:

$$\rho(x,\ 0)\ =\ [\pi\ \sigma(0)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(0)]^2}{\sigma(0)}}\ \ =$$

$$=\ A^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ =\ \frac{1}{\sqrt{A}}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ , \qquad (2.2.1.13a)$$

$$A\ =\ \pi\ \sigma(0)\ , \qquad B\ =\ x\ -\ q(0)\ , \qquad (2.2.1.13b\text{-}c)$$

$$C\ =\ \sigma(0)\ . \qquad (2.2.1.13d)$$

Sendo a expressão (2.2.1.13a) uma solução particular da equação representada pela expressão (2.2.1.12), deveremos ter:

$$\frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ \Big(\ \frac{1}{\rho(x,\ 0)}\ \frac{\partial^3 \rho(x,\ 0)}{\partial x^3}\ -\ \frac{2}{\rho^2(x,\ 0)}\ \frac{\partial \rho(x,\ 0)}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \rho(x,\ 0)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ \frac{1}{\rho^3(x,\ 0)}\ [\frac{\partial \rho(x,\ 0)}{\partial x}]^3\ \Big)\ =\ k(0)\ [x\ -\ q(0)]\ . \qquad (2.2.1.14)$$

Assim, usando-se as expressões (2.2.1.13a-d), calculemos as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial \rho(x,\ 0)}{\partial x} \ = \ - \ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ B\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ . \qquad (2.2.1.15a)$$

$$\frac{\partial^2 \rho(x,\ 0)}{\partial x^2} \ = \ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ - \ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ B\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ \Big) \ =$$

$$= \ - \ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ \Big[\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ \frac{\partial B}{\partial x}\ + \ B\ \frac{\partial}{\partial x}\ (e^{-\ \frac{B^2}{C}})\ \Big] \ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \rho(x,\ 0)}{\partial x^2} \ = \ - \ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ (1\ - \ \frac{2\ B^2}{C})\ . \qquad (2.2.1.15b)$$

$$\frac{\partial^3 \rho(x,\ 0)}{\partial x^3} \ = \ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big[\ - \ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ (1\ - \ \frac{2\ B^2}{C})\ \Big] =$$

$$= \text{-}\ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ (1\ - \ \frac{2\ B^2}{C})\ \frac{\partial}{\partial x}\ (e^{-\ \frac{B^2}{C}})\ -$$

$$- \ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (1\ - \ \frac{2\ B^2}{C}) \ =$$

$$= \text{-}\ \frac{2}{\sqrt{A}\ C}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ \Big[\ (1\ - \ \frac{2\ B^2}{C})\ (-\ \frac{2\ B}{C})\ - \ \frac{4\ B}{C}\ \Big] \rightarrow$$

$$\frac{\partial^3 \rho(x,\ 0)}{\partial x^3} \ = \ - \ \frac{4\ B}{\sqrt{A}\ C^2}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ (\frac{2\ B^2}{C}\ - \ 3)\ . \qquad (2.2.1.15c)$$

Substituindo-se as expressões (2.2.1.13a,15a-c) no primeiro membro da expressão (2.2.1.14) e usando-se as expressões (2.2.1.13c-d), resultará:

$$\frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ \Big[\ (\frac{1}{A^{-\ 1/2}\ e^{-\ B^2/C}})\ [-\ \frac{4\ B}{A^{1/2}\ C^2}\ e^{-\ B^2/C}\ (\frac{2\ B^2}{C}\ - \ 3)]\ \text{-}$$

$$\text{-}\ (\frac{2}{A^{-\ 1} e^{-\ 2\ B^2/C}})(-\ \frac{2\ B}{A^{1/2}\ C} e^{-\ B^2/C})[-\ \frac{2\ e^{-\ B^2/C}}{A^{1/2}\ C}(1 - \frac{2\ B^2}{C})]\ +$$

$$+ \left(\frac{1}{A^{-\ 3/2}\ e^{-\ 3\ B^2/C}}\right) \left(-\ \frac{2\ B}{A^{1/2}\ C}\ e^{-\ B^2/C}\right)^3 \Big] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\Big[-\ \frac{4\ B}{C^2}\ \left(\frac{2\ B^2}{C}\ -\ 3\right) - \frac{8\ B}{C^2}\ \left(1\ -\ \frac{2\ B^2}{C}\right)\ -\ \frac{8\ B^3}{C^3}\Big] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ \Big[\ -\ \frac{8\ B^3}{C^3}\ +\ \frac{12\ B}{C^2}\ -\ \frac{8\ B}{C^2}\ +\ \frac{16\ B^3}{C^3}\ -\ \frac{8\ B^3}{C^3}\ \Big] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ \frac{4\ B}{C^2}\ =\ \frac{\hbar^2\ B}{m^2\ C^2}\quad \to$$

$$\frac{\hbar^2}{m^2}\ \frac{[x\ -\ q(0)]}{\sigma^2(0)}\ = k(0)\ [x\ -\ q(0)]\quad \to$$

$$k(0)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(0)}\ . \qquad (2.2.1.16)$$

Em analogia com as expressões (2.2.1.12,13a), a expressão (2.2.1.16) nos permite escrever que:

$$k(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(t)}\quad \to\quad \sigma^2(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2\ k(t)}\ , \qquad (2.2.1.17\text{a-b})$$

$$\rho(x,\ t)\ =\ [\pi\ \sigma(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma(t)}}\ . \qquad (2.2.1.17\text{c})$$

De posse das expressões (2.2.1.17a-c), calculemos as seguintes derivadas (lembrar que x e t são variáveis independentes):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\ =\ -\ \frac{1}{2}\ (\pi\ \sigma)^{-\ 3/2}\ \pi\ \dot{\sigma}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}}\ +$$

$$+\ (\pi\ \sigma)^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}}\ \left[\frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma^2}\ \dot{\sigma}\ +\ \frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \dot{q}\right] =$$

$$= -\ \frac{1}{2}\ \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\ (\pi\ \sigma)^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma}}\ +$$

$$+ \ [\pi \ \sigma(t)]^{- \ 1/2} \ e^{- \ \frac{(x \ - \ q)^2}{\sigma}} \ [\frac{(x \ - \ q)^2}{\sigma^2} \ \dot{\sigma} \ + \ \frac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ \dot{q}] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\dot{\sigma} \ \rho}{2 \ \sigma} \ + \ \rho \ [\frac{(x \ - \ q)^2}{\sigma^2} \ \dot{\sigma} \ + \ \frac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ \dot{q}] \ . \qquad (2.2.1.18)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \ = \ [\pi \ \sigma(t)]^{- \ 1/2} \ e^{- \ \frac{[x \ - \ q(t)]^2}{\sigma}} \ \frac{\partial}{\partial x} \ [- \ \frac{(x- \ q)^2}{\sigma}] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \ = \ - \ \frac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ \rho \ . \qquad (2.2.1.19)$$

Tomando-se a expressão (2.2.1.3) e usando-se as expressões (2.2.1.18-19), virá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \frac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ = \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \rho \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ + \ v_{qu} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ = \ 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ + \ \frac{v_{qu}}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ = \ - \ \frac{1}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ - \ \frac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ v_{qu} \ =$$

$$= \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ - \ \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} \ (x \ - \ q)^2 \ - \ \frac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ \dot{q} \ . \qquad (2.2.1.20)$$

Chamando-se:

$$p(x, \ t) \ = \ - \ 2 \ \frac{(x \ - \ q)}{\sigma} \ , \qquad (2.2.1.21a)$$

$$r(x, \ t) \ = \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ - \ \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} \ (x \ - \ q)^2 \ - \ \frac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ \dot{q} \ , \qquad (2.2.1.21b)$$

a expressão (2.2.1.20) ficará [lembrar que $v_{qu}(x, \ t)$]:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ + \ p(x, \ t) \ v_{qu} \ = \ r(x, \ t) \ . \qquad (2.2.1.22)$$

A solução da equação diferencial representada pela expressão (2.2.1.22) será:

$$v_{qu} \;=\; \frac{1}{u}\,[\int r\;u\;\partial x \;+\; c(t)]\;, \qquad (2.2.1.23a)$$

$$u \;=\; exp\;(\int p\;\partial x)\;. \qquad (2.2.1.23b)$$

Usando-se as expressões (2.2.1.17c,21a,23b), resultará:

$$u \;=\; exp\;\Big(\;\int\;[-\;\frac{2\;(x\;-\;q)}{\sigma}]\;\partial x\;\Big)\;=$$

$$=\;exp\;[-\;\frac{2}{\sigma}\;\int\;(x\;-\;q)\;\partial(x\;-\;q)\;]\;=$$

$$=\;exp\;[-\;\frac{(x\;-\;q)^2}{\sigma}]\quad\rightarrow\quad u\;=\;(\pi\;\sigma)^{1/2}\;\rho\;. \qquad (2.2.1.24)$$

Agora, usando-se as expressões (2.2.1.21b,24), obteremos:

$$I\;=\;\int\;r\;u\;\partial x\;=$$

$$=\;\int\;[\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;-\;\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}\;(x\;-\;q)^2\;-\;\frac{2\;(x\;-\;q)}{\sigma}\;\dot{q}]\;(\pi\;\sigma)^{1/2}\;\rho\;\partial x\quad\rightarrow$$

$$I\;=\;I_1\;-\;I_2\;, \qquad (2.2.1.25a)$$

$$I_1\;=\;\int\;[\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;-\;\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}\;(x\;-\;q)^2]\;(\pi\;\sigma)^{1/2}\;\rho\;\partial x\;, \qquad (2.2.1.25b)$$

$$I_2\;=\;\int\;[\frac{2\;(x\;-\;q)}{\sigma}\;\dot{q}]\;(\pi\;\sigma)^{1/2}\;\rho\;\partial x\;. \qquad (2.2.1.25c)$$

Para realizarmos a integração indicada na expressão (2.2.1.25b), deveremos fazer a derivada indicada abaixo; para isso, usaremos a expressão (2.2.1.19). Assim, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\;[\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;(x-\;q)\;\rho]\;=\;\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;\rho\;+\;\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;(x\;-\;q)\;\frac{\partial\rho}{\partial x}\;=$$

$$=\;\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;\rho\;-\;\frac{\dot{\sigma}}{2\;\sigma}\;(x\;-\;q)\;\frac{2\;(x\;-\;q)}{\sigma}\;\rho\quad\rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ \rho\right]\ =\ \left[\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{\dot{\sigma}\ (x\ -\ q)^2}{\sigma^2}\right]\ \rho\ . \qquad (2.2.1.26)$$

Considerando-se a expressão (2.2.1.25b) e inserindo-se nela a expressão (2.2.1.26), obteremos:

$$I_1\ =\ \int \left[\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}\ (x\ -\ q)^2\right]\ (\pi\ \sigma)^{1/2}\ \rho\ \partial x\ =$$

$$=\ (\pi\ \sigma)^{1/2} \int \frac{\partial}{\partial x}\ \left[\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ \rho\right]\ \partial x\ \ \rightarrow$$

$$I_1\ =\ (\pi\ \sigma)^{1/2}\ \rho\ \left(\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\right)\ (x\ -\ q)\ . \qquad (2.2.1.27)$$

Para realizarmos a integração indicada na expressão (2.2.1.25c), deveremos considerar a expressão (2.2.1.19). Portanto, virá:

$$I_2\ =\ \int \left[\frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \dot{q}\right]\ (\pi\ \sigma)^{1/2}\ \rho\ \partial x\ =$$

$$=\ -\ (\pi\ \sigma)^{1/2}\ \dot{q} \int \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \partial x\ \ \rightarrow$$

$$I_2\ =\ -\ (\pi\ \sigma)^{1/2}\ \dot{q}\ \rho\ . \qquad (2.2.1.28)$$

Substituindo-se as expressões (2.2.1.27-28) na expressão (2.2.1.25a), teremos:

$$I\ =\ (\pi\ \sigma)^{1/2}\ \rho\ \left[\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}\right]\ . \qquad (2.2.1.29)$$

Tomando-se a expressão (2.2.1.23a) e usando-se nela as expressões (2.2.1.24,29), ficará:

$$v_{qu}\ =\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}\ +\ \frac{c(t)}{(\pi\ \sigma)^{1/2}\ \rho}\ . \qquad (2.2.1.30a)$$

Considerando-se que $\rho \rightarrow 0$, quando $\mid x \mid \rightarrow \infty$, então a constante $c(t)$ deverá ser nula. Assim, teremos:

$$v_{qu}(x,\ t)\ =\ \frac{\dot{\sigma}(t)}{2\ \sigma(t)}\ [x\ -\ q(t)]\ +\ \dot{q}(t)\ . \qquad (2.2.1.30b)$$

De posse da expressão (2.2.1.30b), calcularemos as seguintes derivadas (lembrar que x e t são variáveis independentes):

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ =$$

$$=\ \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ . \qquad (2.2.1.31)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ =\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ . \qquad (2.2.1.32)$$

Usando-se as expressões (2.2.1.17a,30b,31,32) e somando-se e subtraindo-se o termo $\omega^2\ q$, a expressão (2.2.1.10) tomará a seguinte forma:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ +$$

$$+\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +$$

$$+\ \omega^2\ x\ +\ \omega^2\ q\ -\ \omega^2\ q\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ \ \rightarrow$$

$$[\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2}\ +\ \omega^2\ -\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2}]\ (x\ -\ q)\ +$$

$$+\ \ddot{q}\ +\ \omega^2\ q\ =\ 0\ . \qquad (2.2.1.33)$$

Para que a expressão (2.2.1.33) seja identicamente nula, é necessário que tenhamos:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2}\ +\ \omega^2\ -\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2}\ =\ 0\ , \qquad (2.2.1.34)$$

$$\ddot{q}\ +\ \omega^2\ q\ =\ 0\ . \qquad (2.2.1.35)$$

Fazendo-se:

$$\sigma \;=\; \frac{\hbar}{m}\,\alpha^2 \;, \qquad (2.2.1.36)$$

teremos:

$$\dot{\sigma} \;=\; \frac{2\,\hbar}{m}\,\alpha\,\dot{\alpha}\;, \qquad \ddot{\sigma} \;=\; \frac{2\,\hbar}{m}\,[(\dot{\alpha})^2 \;+\; \alpha\,\ddot{\alpha}]\;. \qquad (2.2.1.37\text{a-b})$$

Considerando-se a expressão (2.2.1.34) e inserindo-se nela as expressões (2.2.1.36,37a-b), resultará:

$$\frac{2\,\hbar}{m}\,\frac{[(\dot{\alpha})^2 \;+\; \alpha\,\ddot{\alpha}]}{\frac{2\,\hbar}{m}\,\alpha^2} \;-\; \frac{\frac{4\,\hbar^2}{m^2}\,\alpha^2\,(\dot{\alpha})^2}{\frac{4\,\hbar^2}{m^2}\,\alpha^4} \;-$$

$$-\;\frac{\hbar^2}{m^2\,\frac{\hbar^2}{m^2}\,\alpha^4} \;+\; \omega^2 \;=$$

$$=\;\frac{(\dot{\alpha})^2}{\alpha^2} \;+\; \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \;-\; \frac{(\dot{\alpha})^2}{\alpha^2} \;-\; \frac{1}{\alpha^4} \;+\; \omega^2 \;=\; 0 \quad \rightarrow$$

$$\ddot{\alpha} \;+\; \omega^2\,\alpha \;=\; \frac{1}{\alpha^3}\;. \qquad (2.2.1.38)$$

Observemos que, embora a expressão acima seja formalmente igual à obtida por Ermakov [expressão (2.1.0.3)], elas diferem fundamentalmente pela presença indireta da **constante de Planck** $\hbar$ na expressão (2.2.1.38), conforme se pode ver pelas expressões (2.2.1.34,36). Essa diferença é a mesma entre a equação de onda clássica d'Alembertiana e a equação de onda quântica Schrödingeriana.

Considerando-se as expressões (2.2.1.35,38) e eliminando-se o termo ω^2 entre elas, teremos:[5]

$$\ddot{\alpha} \;-\; \frac{\ddot{q}\,\alpha}{q} \;=\; \frac{1}{\alpha^3} \quad \rightarrow \quad \ddot{\alpha}\,q \;-\; \ddot{q}\,\alpha \;=\; \frac{q}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\,(\dot{\alpha}\,q \;-\; \dot{q}\,\alpha) \;=\; \frac{q}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$(\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ \frac{d}{dt}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ =\ \frac{q}{\alpha^3}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ [\frac{1}{2}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2]\ =\ -\ \frac{q}{\alpha}\ \frac{d}{dt}\ (\frac{q}{\alpha})\ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ [\frac{1}{2}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2]\ =\ -\ \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ (\frac{q}{\alpha})^2\ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ \Big(\ [\frac{1}{2}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2]\ +\ \frac{1}{2}\ (\frac{q}{\alpha})^2\ \Big)\ =\ 0\ \rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt}\ =\ 0\ , \qquad (2.2.1.39)$$

onde:

$$I\ =\ \frac{1}{2}\ [(\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2\ +\ (\frac{q}{\alpha})^2]\ , \qquad (2.2.1.40)$$

representa o **invariante de Ermakov-Lewis-Schrödinger** para o $OHDT$. Desse modo, a expressão (2.2.1.39) nos mostra que a **equação de Schrödinger** possui um **invariante de Ermakov-Lewis** para o $OHDT$.

2.2.2. Equação de Bialynicki-Birula-Mycielski

Para o caso do $OHDT$, a **equação de Bialynicki-Birula-Mycielski** será escrita como [vide expressões (1.2.2.1) e (2.1.0.4)]:

$$i\ \hbar\ \frac{\partial}{\partial t}\ \psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2 \psi(x,\ t)}{\partial t^2}\ +\ \Big(\ \frac{1}{2}\ m\ \omega^2(t)\ x^2\ -$$

$$-\ \frac{\hbar\ \nu}{2}\ \ell n\ [\psi(x,\ t)\ \psi^*(x,\ t)]\ \Big)\ \psi(x,\ t)\ , \qquad (2.2.2.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$, como no caso anterior, representa a função de onda, e ν é uma constante.

Como no caso anterior, considerando-se a **transformação de Madelung-Bohm**, dada pela expressão (2.2.1.2), e aplicando-a à expressão (2.2.2.1), vimos no Capítulo 1, para o caso geral de $V(x,\ t)$, que [vide expressões (1.2.2.5-6)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} = 0, \qquad (2.2.2.2)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x}(V + V_{qu} - V_{BBM}) = 0 , \qquad (2.2.2.3)$$

onde V_{BBM}, ρ, v_{qu} e V_{qu} são dados, respectivamente, pelas expressões (1.2.2.7) e (2.2.1.5,6,7a-b).

Considerando-se as expressões (1.2.2.7) e (2.1.0.4), a expressão (2.2.2.3) ficará:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \omega^2 \ x =$$

$$= - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x}(V_{qu} - \frac{\hbar \ \nu}{2} \ \ell n \ \rho) . \qquad (2.2.2.4)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento utilizado na integração da expressão (2.2.1.8) e tendo em vista a expressão (2.2.1.7a), poderemos escrever que [sendo $< x > = q(t)$, segundo a expressão (2.2.1.9c)]:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \omega^2 \ x = k(t) \ [x - q(t)] , \qquad (2.2.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} + \frac{\hbar \ \nu}{2 \ m} \ \ell n \ \rho) =$$

$$= k(t) \ [x - q(t)] . \qquad (2.2.2.6)$$

Continuando-se com a analogia com o que foi realizado no item 2.2.1. a expressão (2.2.2.6) tomará a seguinte forma [ver expressões (2.2.1.12,16,17a-b)]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} + \frac{\hbar \ \nu}{2 \ m} \ \ell n \ \rho) = k(t) \ [x - q(t)] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ [\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\ -\ \frac{2}{\rho^2}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\rho^3}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^3] +$$

$$+\ \frac{\hbar\ \nu}{2\ m}\ \frac{\partial(\ell n\ \rho)}{\partial x} =\ k(t)\ [x\ -\ q(t)]\ . \qquad (2.2.2.7)$$

Para integrarmos a expressão (2.2.2.7), precisamos conhecer uma condição inicial para $\rho(x,\ t)$. Assim, admitiremos inicialmente que o sistema físico considerado seja representado por um pacote de onda gaussiano normalizado e centrado em $q(0)$, ou seja [vide expressão (2.2.1.13a)]:

$$\rho(x,\ 0)\ =\ [\pi\ \sigma(0)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(0)]^2}{\sigma(0)}}\ =$$

$$=\ A^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ =\ \frac{1}{\sqrt{A}}\ e^{-\ \frac{B^2}{C}}\ , \qquad (2.2.2.8)$$

onde A, B e C são dados, respectivamente, pelas expressões (2.2.1.13b-d).

Sendo a expressão (2.2.2.8) uma solução particular da equação representada pela expressão (2.2.2.7), deveremos ter:

$$\frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ \Big(\ \frac{1}{\rho(x,\ 0)}\ \frac{\partial^3 \rho(x,\ 0)}{\partial x^3}\ -\ \frac{2}{\rho^2(x,\ 0)}\ \frac{\partial \rho(x,\ 0)}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \rho(x,\ 0)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ \frac{1}{\rho^3(x,\ 0)}\ [\frac{\partial \rho(x,\ 0)}{\partial x}]^3\ \Big)\ +\ \frac{\hbar\ \nu}{2\ m}\ \frac{\partial[\ell n\ \rho(x,\ 0)]}{\partial x}\ =$$

$$=\ k(0)\ [x\ -\ q(0)]\ . \qquad (2.2.2.9)$$

Considerando-se que $\frac{\partial(\ell n\ z)}{\partial x}\ =\ \frac{1}{z}\ \frac{\partial z}{\partial x}$, as expressões (2.2.1.13a-d,15a) e (2.2.2.8) nos mostram que:

$$\frac{\partial[\ell n\ \rho\ (x,\ 0)]}{\partial x}\ =\ \frac{1}{\rho(x,\ 0)}\ \frac{\partial \rho(x,\ 0)}{\partial x}\ =$$

$$=\ \frac{1}{A^{-\ 1/2}\ e^{-\ B^2/C}}\ (-\ \frac{2\ B}{A^{1/2}\ C}\ e^{-\ B^2/C})\ =$$

$$= - \frac{2\ B}{C} = - \frac{2\ [x\ -\ q(0)]}{\sigma(0)} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\hbar\ \nu}{2\ m}\ \frac{\partial[\ell n\ \rho(x,\ 0)]}{\partial x} = - \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(0)}\ [x\ -\ q(0)]\ . \qquad (2.2.2.10)$$

Considerando-se as expressões (2.2.1.14) e (2.2.2.9) verifica-se que os três primeiros termos do primeiro membro dessas expressões são idênticos. Assim, seguindo-se o que foi feito no item 2.2.1. e usando-se a expressão (2.2.2.10), virá:

$$\frac{\hbar^2}{m^2}\ \frac{[x\ -\ q(0)]}{\sigma^2(0)} - \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(0)}\ [x\ -\ q(0)] =$$

$$= [\frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(0)} - \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(0)}]\ [x\ -\ q(0)] =$$

$$= k(0)\ [x\ -\ q(0)] \quad \rightarrow \quad k(0) = \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(0)} - \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(0)} \quad \rightarrow$$

$$\sigma^2(0) = \frac{\hbar^2}{m^2}\ \frac{1}{k(0)\ +\ \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(0)}} \quad \rightarrow$$

$$k(t) = \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(t)} - \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(t)}\ , \qquad (2.2.2.11a)$$

$$\sigma^2(t) = \frac{\hbar^2}{m^2}\ \frac{1}{k(t)\ +\ \frac{\hbar\ \nu}{m\ \sigma(t)}}\ , \qquad (2.2.2.11b)$$

$$\rho(x,\ t) = [\pi\ \sigma(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma(t)}}\ . \qquad (2.2.2.11c)$$

Para integrarmos a expressão (2.2.2.3) deveremos seguir o mesmo protocolo empregado na integração da expressão (2.2.1.4). Assim, usando-se as expressões (2.2.1.30b,31,32), resultará:

$$v_{qu}(x,\ t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{2\ \sigma(t)}\ [x\ -\ q(t)] + \dot{q}(t)\ , \qquad (2.2.2.12a)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ = \ \frac{\ddot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ (x \ - \ q) \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2 \ \sigma^2} \ (x \ - \ q) \ -$$

$$- \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ \dot{q} \ + \ \ddot{q} \ , \qquad (2.2.2.12b)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ = \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ . \qquad (2.2.2.12c)$$

Assim, substituindo-se as expressões (2.2.2.12a-c) na expressão (2.2.2.5), considerando-se a expressão (2.2.2.11a) e somando-se e subtraindo-se o termo $\omega \ q$, resultará:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ (x \ - \ q) \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2 \ \sigma^2} \ (x \ - \ q) \ - \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ \dot{q} \ +$$

$$+ \ \ddot{q} \ + \ [\frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q}] \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ + \ \omega^2 \ x \ +$$

$$+ \ \omega^2 \ q \ - \ \omega^2 \ q \ = \ \frac{\ddot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ (x \ - \ q) \ - \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ \dot{q} \ +$$

$$+ \ \ddot{q} - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2 \ \sigma^2} \ (x \ - \ q) \ + \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4 \ \sigma^2} \ (x \ - \ q) \ + \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ \dot{q} \ +$$

$$+ \ \omega^2 \ (x \ - \ q) \ + \ \omega^2 \ q \ = \ (\frac{\hbar^2}{m^2 \ \sigma^2} \ - \ \frac{\hbar \ \nu}{m \ \sigma}) \ (x \ - \ q) \quad \to$$

$$[\frac{\ddot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4 \ \sigma^2} \ + \ \omega^2 \ + \ \frac{\hbar \ \nu}{m \ \sigma} \ -$$

$$- \ \frac{\hbar^2}{m^2 \ \sigma^2}] \ (x \ - \ q) \ + \ \ddot{q} \ + \ \omega^2 \ q = 0 \ . \qquad (2.2.2.13)$$

Usando-se a expressão (2.2.1.36) e em analogia com o que foi realizado no item 2.2.1., encontraremos que:

$$\ddot{\alpha} \ + \ \omega^2 \ \alpha \ + \ \frac{\nu}{\alpha} \ = \ \frac{1}{\alpha^3} \ , \qquad (2.2.2.14)$$

$$\ddot{q} \ + \ \omega^2 \ q = 0 \ . \qquad (2.2.2.15)$$

Tomando-se as expressões (2.2.2.14-15) e eliminando-se o termo ω^2 entre elas, virá:

$$\ddot{\alpha} \; - \; (\frac{\ddot{q}}{q}) \; \alpha \; + \; \frac{\nu}{\alpha} \; = \; \frac{1}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$\ddot{\alpha} \; q \; - \; \ddot{q} \; \alpha \; + \; \frac{\nu \; q}{\alpha} \; = \; \frac{q}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \; (\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha) \; + \; \frac{\nu \; q}{\alpha} \; = \; \frac{q}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$(\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha) \; \frac{d}{dt} \; (\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha) \; + \; \frac{\nu \; q}{\alpha} \; (\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha) \; =$$

$$= \; \frac{q}{\alpha^3} \; (\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha) \; = \; - \; \frac{q}{\alpha} \; (\frac{\alpha \; \dot{q} \; - \; \dot{\alpha} \; q}{\alpha^2}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \; [\frac{1}{2} \; (\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha)^2] \; + \; \frac{d}{dt} \; [\frac{1}{2} \; (\frac{q}{\alpha})^2] \; = \; \frac{\nu \; q}{\alpha} \; (\dot{q} \; \alpha \; - \; \dot{\alpha} \; q) \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\; \frac{1}{2} \; [(\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha)^2 \; + \; (\frac{q}{\alpha})^2] \; \right) \; = \; \nu \; q \; \alpha \; \frac{d}{dt} \; (\frac{q}{\alpha}) \quad \rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} \; = \; \nu \; q \; \alpha \; \frac{d}{dt} \; (\frac{q}{\alpha}) \; , \qquad (2.2.2.16)$$

$$I \; = \; \frac{1}{2} \left(\; [(\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha)^2] \; + \; (\frac{q}{\alpha})^2 \; \right) . \qquad (2.2.2.17)$$

A expressão (2.2.2.16) nos mostra que a **equação de Bialynicki-Birula-Mycielski** não possui um **invariante de Ermakov-Lewis** para o $OHDT$.

2.2.3. Equação de Bateman-Caldirola-Kanai

Para o caso do $OHDT$, a **equação de Bateman-Caldirola-Kanai** tomará o seguinte aspecto [vide expressões (1.2.3.1) e (2.1.0.4)]:

$$i \; \hbar \; \frac{\partial}{\partial t} \; \psi(x, \; t) \; = \; - \; \frac{\hbar^2}{2 \; m} \; e^{- \; \lambda \; t} \; \frac{\partial^2 \psi(x, \; t)}{\partial t^2} \; +$$

$$+ \frac{1}{2}\, e^{\lambda\, t}\, m\, \omega^2(t)\, x^2\, \psi(x,\ t)\ , \qquad (2.2.3.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ representa, como nos casos anteriores, a função de onda, e λ é uma constante.

Também, como nos casos anteriores, considerando-se a **transformação de Madelung-Bohm**, dada pela expressão (2.2.1.2), demonstramos no Capítulo 1 que [vide expressões (1.2.3.7,12)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, v_{BCK})}{\partial x} = 0\ , \qquad (2.2.3.2)$$

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} + v_{BCK}\, \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{m}\, \frac{\partial}{\partial x}\, (V + V_{BCK}) = -\, \lambda\, v_{BCK}\ , \qquad (2.2.3.3)$$

sendo a **velocidade de Bateman-Caldirola-Kanai** v_{BCK} e o **potencial de Bateman-Caldirola-Kanai** V_{BCK} dados, respectivamente, por [vide expressões (1.2.3.6,9)]:

$$v_{BCK} = e^{-\, \lambda\, t}\, v_{qu}\ , \qquad (2.2.3.4)$$

$$V_{BCK} = e^{-\, 2\, \lambda\, t}\, V_{qu}\ , \qquad (2.2.3.5)$$

onde v_{qu} e V_{qu} têm o mesmo significado dos casos anteriores [vide as expressões (1.2.1.8,11a-b)].

Considerando-se a expressão (2.2.3.3) e inserindo-se nela a expressão (2.1.0.4), resultará:

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} + v_{BCK}\, \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} +$$

$$+ \lambda\, v_{BCK} + \omega^2\, x = -\, \frac{1}{m}\, \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x}\ . \qquad (2.2.3.6)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento utilizado na integração das expressões (2.2.1.8) e (2.2.2.4) e tendo em vista as expressões (1.2.1.11a) e (2.2.3.5), poderemos escrever que [sendo $< x > = q(t)$, segundo a expressão (2.2.1.9c)]:

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial t} + v_{BCK} \frac{\partial v_{BCK}}{\partial x} +$$

$$+ \lambda v_{BCK} + \omega^2 x = k(t) [x - q(t)] , \qquad (2.2.3.7)$$

$$- \frac{1}{m} \frac{\partial V_{BCK}}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar^2}{2 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) = k(t) [x - q(t)] , \qquad (2.2.3.8)$$

Realizando-se a derivada indicada no segundo membro da expressão (2.2.3.8), virá:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\hbar^2}{2 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) = \frac{\hbar^2}{2 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x})] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2 \sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial x})] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{1}{\sqrt{\rho}} [\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\sqrt{\rho}})] \Big) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{1}{2 \sqrt{\rho^3}} \frac{\partial \rho}{\partial x})] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2 \rho^2} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2} e^{- 2 \lambda t} [\frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2 \rho^2} 2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \rho}{\partial x}) -$$

$$- (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2 (- \frac{2}{2}) \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x}] \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\hbar^2}{2 m^2} e^{- 2 \lambda t} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\ m^2}\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\ -\ \frac{2}{\rho^2}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\ +\ \frac{1}{\rho^3}\ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^3]\ =$$

$$=\ k(t)\ [x\ -\ q(t)]\ . \qquad (2.2.3.9)$$

Para integrarmos a expressão acima, seguiremos o mesmo protocolo utilizado na integração da expressão (2.2.1.12). Desse modo, escreveremos que [ver as expressões (2.2.1.17a-c) e lembrar a presença de $e^{-\ 2\ \lambda\ t}$ na expressão (2.2.3.5)]:

$$k(t)\ =\ \frac{\hbar^2\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{m^2\ \sigma^2(t)}\ \ \rightarrow\ \ \sigma^2(t)\ =\ \frac{\hbar^2\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{m^2\ k(t)}\ , \qquad (2.2.3.10a\text{-}b)$$

$$\rho(x,\ t)\ =\ [\pi\ \sigma(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma(t)}}\ . \qquad (2.2.3.10c)$$

E mais ainda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\dot{\sigma}\ \rho}{2\ \sigma}\ +\ \rho\ [\frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma^2}\ \dot{\sigma}\ +\ \frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \dot{q}]\ , \qquad (2.2.3.11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\ =\ -\ \frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \rho\ , \qquad (2.2.3.12)$$

$$v_{BCK}(x,t) =\ \frac{\dot{\sigma}(t)}{2\ \sigma(t)}\ [x\ -\ q(t)]\ +\ \dot{q}(t)\ . \qquad (2.2.3.13)$$

De posse da expressão (2.2.3.13), calcularemos as seguintes derivadas (lembrar que x e t são variáveis independentes):

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial t}\ =\ \frac{\partial}{\partial t}\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ =$$

$$=\ \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ . \qquad (2.2.3.14)$$

$$\frac{\partial v_{BCK}}{\partial x}\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ =\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ . \qquad (2.2.3.15)$$

Usando-se a expressão (2.2.3.7), inserindo-se nela as expressões (2.2.3.10a,13-15), e somando-se e subtraindo-se o termo $\omega^2\ q$, teremos:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ +$$

$$+\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \lambda\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ +$$

$$+\ \omega^2\ x\ +\ \omega^2\ q\ -\ \omega^2\ q\ =\ \frac{\hbar^2\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{m^2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ \ \rightarrow$$

$$[\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2}\ +\ \frac{\lambda\ \dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \omega^2\ -\ \frac{\hbar^2\ e^{-\ 2\ \nu\ t}}{m^2\ \sigma^2}]\ (x\ -\ q)\ +$$

$$+\ \ddot{q}\ +\ \lambda\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q\ =\ 0\ . \qquad (2.2.3.16)$$

Para que a expressão (2.2.3.16) seja identicamente nula, é necessário que tenhamos:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2}\ +\ \frac{\lambda\ \dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \omega^2\ -\ \frac{\hbar^2\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{m^2\ \sigma^2}\ =\ 0\ , \qquad (2.2.3.17)$$

$$\ddot{q}\ +\ \lambda\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q\ =\ 0\ . \qquad (2.2.3.18)$$

Fazendo-se, como no casos anteriores:

$$\sigma\ =\ \frac{\hbar}{m}\ \alpha^2\ , \qquad (2.2.3.19)$$

teremos:

$$\dot{\sigma}\ =\ \frac{2\ \hbar}{m}\ \alpha\ \dot{\alpha}\ , \qquad \ddot{\sigma}\ =\ \frac{2\ \hbar}{m}\ [(\dot{\alpha})^2\ +\ \alpha\ \ddot{\alpha}]\ . \qquad (2.2.3.20a\text{-}b)$$

Tomando-se a expressão (2.2.3.17) e inserindo-se nela as expressões (2.2.3.19,20a-b), virá:

$$\frac{2\ \hbar}{m}\ \frac{[(\dot{\alpha})^2\ +\ \alpha\ \ddot{\alpha}]}{\frac{2\ \hbar}{m}\ \alpha^2}\ -\ \frac{\frac{4\ \hbar^2}{m^2}\ \alpha^2\ (\dot{\alpha})^2}{\frac{4\ \hbar^2}{m^2}\ \alpha^4}\ +$$

$$+ \frac{\frac{2\,\hbar}{m}\ \lambda\ \alpha\ \dot{\alpha}}{\frac{2\,\hbar}{m}\ \alpha^2}\ -\ \frac{\hbar^2\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{m^2\ \frac{\hbar^2}{m^2}\ \alpha^4}\ +\ \omega^2 =$$

$$= \frac{(\dot{\alpha})^2}{\alpha^2}\ +\ \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}\ -\ \frac{(\dot{\alpha})^2}{\alpha^2}\ +\ \frac{\lambda\ \dot{\alpha}}{\alpha}\ -\ \frac{e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{\alpha^4}\ +\ \omega^2\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\ddot{\alpha}\ +\ \lambda\ \dot{\alpha}\ +\ \omega^2\ \alpha\ =\ \frac{e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{\alpha^3}\ . \qquad (2.2.3.21)$$

Considerando-se as expressões (2.2.3.16,21) e eliminando-se o termo ω^2 entre elas, teremos:[5]

$$\ddot{\alpha}\ +\ \lambda\ \dot{\alpha}\ -\ (\frac{\ddot{q}\ +\ \lambda\ \dot{q}}{q})\ \alpha\ =\ \frac{e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{\alpha^3}\ \ \rightarrow$$

$$\ddot{\alpha}\ q\ -\ \ddot{q}\ \alpha\ +\ \lambda\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ =\ \frac{q\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{\alpha^3}\ \ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ +\ \lambda\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ =\ \frac{q\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{\alpha^3}\ \ \rightarrow$$

$$(\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ \frac{d}{dt}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ +\ \lambda\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2\ =$$

$$=\ \frac{q\ e^{-\ 2\ \lambda\ t}}{\alpha^3}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)\ \ \rightarrow\ \ \frac{d}{dt}\ [\frac{1}{2}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2]\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ 2\ \lambda\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2\ =\ -\ e^{-\ 2\lambda\ t}\ \frac{q}{\alpha}\ \frac{d}{dt}\ (\frac{q}{\alpha})\ \ \rightarrow$$

$$e^{2\ \lambda\ t}\ \Big(\ \frac{d}{dt}\ [\frac{1}{2}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2]\ +\ \frac{1}{2}\ 2\ \lambda\ (\dot{\alpha}\ q\ -$$

$$-\ \dot{q}\ \alpha)^2\ \Big)\ =\ -\ \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ (\frac{q}{\alpha})^2\ \ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ \Big(\ e^{2\ \lambda\ t}\ [\frac{1}{2}\ (\dot{\alpha}\ q\ -\ \dot{q}\ \alpha)^2]\ +\ \frac{1}{2}\ (\frac{q}{\alpha})^2\ \Big)\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt}\ =\ 0\ , \qquad (2.2.3.22)$$

sendo:

$$I \; = \; \frac{1}{2} \left(\; e^{2 \; \lambda \; t} \; [(\dot{\alpha} \; q \; - \; \dot{q} \; \alpha)^2] \; + \; (\frac{q}{\alpha})^2 \; \right) \, , \qquad (2.2.3.23)$$

a expressão que representa o **invariante de Ermakov-Lewis-Bateman-Caldirola-Kanai** do $OHDT$.

A expressão (2.2.3.22) indica que a **equação de Bateman-Caldirola-Kanai** possui um **invariante de Ermakov-Lewis** para o $OHDT$.

2.3. Sistemas Físicos Não-Conservativos

2.3.1. Equação de Kostin

Para o caso do $OHDT$, a **equação de Kostin** será escrita na forma [vide expressões (1.3.1.1) e (2.1.0.4)]:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial t^2}\ +\ [\tfrac{1}{2}\ m\ \omega^2(t)\ x^2\ +$$

$$+\ \frac{\hbar\ \nu}{2\ i}\ \ell n\ \frac{\psi(x,\ t)}{\psi^*(x,\ t)}]\ \psi(x,\ t)\ ,\qquad (2.3.1.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ representa, como nos casos anteriores, a função de onda, e ν é uma constante.

Como nos casos estudados anteriormente, usando-se a **transformação de Madelung-Bohm** [expressão (2.2.1.2)] e aplicando-a à expressão (2.3.1.1), teremos [vide expressões (1.3.1.5,6a)]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\ +\ \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\ =\ 0\ ,\qquad (2.3.1.2)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ +\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +$$

$$+\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V\ +\ V_{qu})\ =\ -\ \nu\ v_{qu}\ ,\qquad (2.3.1.3)$$

onde v_{qu} e V_{qu} têm o mesmo significado dos casos anteriores [vide as expressões (1.2.1.8,11a-b)].

Considerando-se a expressão (2.3.1.3) e inserindo-se nela a expressão (2.1.0.4), resultará:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ +\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +$$

$$+\ \nu\ v_{qu}\ +\ \omega^2\ x\ =\ -\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x}\ ,\qquad (2.3.1.4)$$

Considerando-se que as expressões (2.2.3.6) e (2.3.1.4) são análogas, seguindo-se o mesmo procedimento realizado para a integração de (2.2.3.6) e, em analogia com as expressões (2.2.3.7,10a-c,13), obteremos:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu} \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \nu \, v_{qu} +$$

$$+ \omega^2 \, x = k(t) \, [x - q(t)] \, , \qquad (2.3.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar^2}{2 \, m^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \right) = k(t) \, [x - q(t)] \, , \qquad (2.3.1.6)$$

$$\rho(x, \, t) = [\pi \, \sigma(t)]^{- \, 1/2} \, e^{- \, \frac{[x \, - \, q(t)]^2}{\sigma(t)}} \, , \qquad (2.3.1.7)$$

$$v_{qu}(x \, , \, t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{2 \, \sigma(t)} \, [x - q(t)] + \dot{q}(t) \, , \qquad (2.3.1.8)$$

onde [lembrar que estamos usando v_{qu} e não v_{BCK} e, portanto, deveremos fazer $\lambda = 0$ nas expressões (2.2.3.10a-c)]:

$$k(t) = \frac{\hbar^2}{m^2 \, \sigma^2(t)} \quad \rightarrow \quad \sigma^2(t) = \frac{\hbar^2}{m^2 \, k(t)} \, . \qquad (2.3.1.9a\text{-}b)$$

De maneira análoga aos casos anteriores, teremos:

$$\left[\frac{\ddot{\sigma}}{2 \, \sigma} - \frac{(\dot{\sigma})^2}{4 \, \sigma^2} + \frac{\nu \, \dot{\sigma}}{2 \, \sigma} + \omega^2 - \frac{\hbar^2}{m^2 \, \sigma^2}\right] (x - q) +$$

$$+ \ddot{q} + \nu \, \dot{q} + \omega^2 \, q = 0 \, . \qquad (2.3.1.10)$$

A expressão acima será identicamente nula, se:

$$\ddot{\alpha} + \nu \, \dot{\alpha} + \omega^2 \, \alpha = \frac{1}{\alpha^3} \, , \qquad (2.3.1.11)$$

$$\ddot{q} + \nu \, \dot{q} + \omega^2 \, q = 0 \, , \qquad (2.3.1.12)$$

$$\alpha^2 \ = \ \tfrac{m}{\hbar} \ \sigma \ , \qquad (2.3.1.13)$$

Usando-se as expressões (2.3.1.11-12) e eliminando-se o termo ω^2 entre elas, teremos:[5]

$$\ddot{\alpha} \ + \ \nu \ \dot{\alpha} \ - \ (\tfrac{\ddot{q} \ + \ \nu \ \dot{q}}{q}) \ \alpha \ = \ \tfrac{1}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$\ddot{\alpha} \ q \ - \ \ddot{q} \ \alpha \ + \ \nu \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha) \ = \ \tfrac{q}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dt} \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha) \ + \ \nu \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha) \ = \ \tfrac{q}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$(\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha) \ \tfrac{d}{dt} \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha) \ + \ \nu \ (\dot{\alpha} \ q - \ \dot{q} \ \alpha)^2 \ =$$

$$= \ \tfrac{q}{\alpha^3} \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha) \quad \rightarrow \quad \tfrac{d}{dt}[\tfrac{1}{2} \ (\dot{\alpha} \ q - \dot{q} \ \alpha)^2] + \tfrac{1}{2} 2 \ \nu \ (\dot{\alpha} \ q - \dot{q} \ \alpha)^2 =$$

$$= \ - \ \tfrac{d}{dt} \ [\tfrac{1}{2} \ (\tfrac{q}{\alpha})^2] \quad \rightarrow \quad e^{2 \ \nu \ t} \ \tfrac{d}{dt} \ [\tfrac{1}{2} \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha)^2] \ +$$

$$+ \ \tfrac{1}{2} \ 2 \ \nu \ e^{2 \ \nu \ t} \ (\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha)^2 \ = \ - \ e^{2 \ \nu \ t} \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{d}{dt} \ (\tfrac{q}{\alpha})^2 \ +$$

$$+ \ \tfrac{1}{2} \ e^{2 \ \nu \ t} \ 2 \ \nu \ (\tfrac{q}{\alpha})^2 \ - \ \tfrac{1}{2} \ e^{2 \ \nu \ t} \ 2 \ \nu \ (\tfrac{q}{\alpha})^2 \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dt} \ \Big(\ \tfrac{1}{2} \ e^{2 \ \nu \ t} \ [(\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha)^2 \ + \ (\tfrac{q}{\alpha})^2] \ \Big) \ = \ \nu \ e^{2 \ \nu \ t} \ (\tfrac{q}{\alpha})^2 \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{dI}{dt} \ = \ \nu \ e^{2 \ \nu \ t} \ (\tfrac{q}{\alpha})^2 \ , \qquad (2.3.1.14)$$

$$I \ = \ \tfrac{1}{2} \ \Big(\ e^{2 \ \nu \ t} \ [(\dot{\alpha} \ q \ - \ \dot{q} \ \alpha)^2] \ + \ (\tfrac{q}{\alpha})^2 \ \Big) \ . \qquad (2.3.1.15)$$

A expressão (2.3.1.14) nos mostra que a **equação de Kostin** não possui um **invariante de Ermakov-Lewis** para o $OHDT$.

2.3.2. **Equação de Schuch-Chung-Hartmann**

No caso do $OHDT$, a **equação de Schuch-Chung-Hartmann** tomará a seguinte forma [vide expressões (1.3.2.1) e (2.1.0.4)]:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial t^2}\ +\ \Big(\ \frac{1}{2}\ m\ \omega^2(t)\ x^2\ +$$

$$+\ \frac{\hbar\ \nu}{i}\ [\ell n\ \psi(x,\ t)\ -\ <\ell n\ \psi(x,\ t)>]\ \Big)\ \psi(x,\ t)\ , \qquad (2.3.2.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ representa, como nos casos anteriores, a função de onda, e ν é uma constante.

Também, como nos casos vistos anteriormente, usando-se a **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (2.2.1.2)], e aplicando-a à expressão (2.3.2.1), demonstramos no Capítulo 1, para o caso geral de $V(x,\ t)$, que [vide expressões (1.3.2.5,6)]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\ +\ \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\ =\ -\ \nu\ \rho\ (\ell n\ \rho-\ <\ell n\ \rho>)\ , \qquad (2.3.2.2)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ +\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (V\ +\ V_{qu})\ =\ -\ \nu\ v_{qu}\ , \qquad (2.3.2.3)$$

onde v_{qu} e V_{qu} têm o mesmo significado dos casos anteriores [vide as expressões (1.2.1.8,11a-b)].

Considerando-se a expressão (2.3.2.3) e inserindo-se nela a expressão (2.1.0.4), resultará:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ +\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +\ \nu\ v_{qu}\ +\ \omega^2\ =\ -\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x}\ . \qquad (2.3.2.4)$$

Seguindo-se o mesmo protocolo utilizado na integração das expressões (2.2.1.8), (2.2.2.3), (2.2.3.3) e (2.3.1.3), poderemos escrever que:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ +\ v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ +\ \nu\ v_{qu}\ +$$

$$+\ \omega^2\ x\ =\ k(t)\ [x\ -\ q(t)]\ , \qquad (2.3.2.5)$$

$$-\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x}\ =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar^2}{2\ m^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \right) = k(t)\ [x - q(t)]\ , \qquad (2.3.2.6)$$

$$\rho(x,\ t) = [\pi\ \sigma(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma(t)}}\ , \qquad (2.3.2.7)$$

com:

$$k(t) = \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(t)} \quad \rightarrow \quad \sigma^2(t) = \frac{\hbar^2}{m^2\ k(t)}\ . \qquad (2.3.2.8a\text{-}b)$$

Tomando-se a expressão (2.3.2.7), calculemos as seguintes expressões (lembrar que $\ell n\ e^{\alpha} = \alpha$):

$$\ell n\ \rho = \ell n\ [(\pi\ \sigma)^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}}] =$$

$$= \ell n\ (\pi\ \sigma)^{-\ 1/2} - \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}\ . \qquad (2.3.2.9)$$

$$< \ell n\ \rho > = < \ell n\ [(\pi\ \sigma)^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}}] > =$$

$$= \ell n\ (\pi\ \sigma)^{-\ 1/2} - < \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma} >\ . \qquad (2.3.2.10)$$

Usando-se as expressões (1.3.2.7), (2.3.2.7) e mais a identidade:[7]

$$\int_{-\ \infty}^{\infty} z^2\ e^{-\ z^2}\ dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ , \qquad (2.3.2.11)$$

teremos:

$$I = < \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma} > =$$

$$= \int_{-\ \infty}^{\infty} (\pi\ \sigma)^{-\ 1/2}\ [e^{-\ \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}}]\ \frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma}\ dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi\ \sigma}} \int_{-\ \infty}^{\infty} [\frac{(x\ -\ q)}{\sqrt{\sigma}}]^2\ e^{-\ [\frac{(x\ -\ q)}{\sqrt{\sigma}}]^2}\ d[\frac{(x\ -\ q)}{\sqrt{\sigma}}] \quad \rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\ .$$

Levando-se a expressão acima na expressão (2.3.2.10) e usando-se a expressão (2.3.2.9), virá:

$$< \ell n \ \rho > = \ \ell n \ (\pi \ \sigma)^{- \ 1/2} \ - \ \tfrac{1}{2} \quad \rightarrow$$

$$\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho > = \ \ell n \ (\pi \ \sigma)^{- \ 1/2} \ - \ \tfrac{(x \ - \ q)^2}{\sigma} \ -$$

$$- \ \ell n \ (\pi \ \sigma)^{- \ 1/2} \ + \ \tfrac{1}{2} \quad \rightarrow$$

$$\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho > = \ - \ \tfrac{1}{2} \ [\tfrac{2 \ (x \ - \ q)^2}{\sigma} \ - \ 1] \ . \qquad (2.3.2.12)$$

Por outro lado, ainda usando-se a expressão (2.3.2.7), resultará:

$$\tfrac{\partial \rho}{\partial x} \ = \ (\pi \ \sigma)^{- \ 1/2} \ e^{- \ \tfrac{(x \ - \ q)^2}{\sigma}} \ [- \ \tfrac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma}] \ =$$

$$= \ - \ \tfrac{2 \ (x \ - \ q)}{\sigma} \ \rho \ , \qquad (2.3.2.13)$$

$$\tfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ = \ - \ \tfrac{2 \ \rho}{\sigma} \ + \ \tfrac{4 \ (x \ - \ q)^2}{\sigma^2} \ \rho \ = \ \tfrac{2 \ \rho}{\sigma} \ [\tfrac{2 \ (x \ - \ q)^2}{\sigma} \ - \ 1] \ .$$

Inserindo-se a expressão acima na expressão (2.3.2.12), teremos:

$$\ell n \ \rho - \ < \ell n \ \rho > = \ - \ \tfrac{\sigma}{4 \ \rho} \ \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ . \qquad (2.3.2.14)$$

Considerando-se a expressão (2.3.2.2) e substituindo-se nela a expressão (2.3.2.14), obteremos:

$$\tfrac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \tfrac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ = \ - \ \nu \ \rho \ (- \ \tfrac{\sigma}{4 \ \rho} \ \tfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}) \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \tfrac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} \ - \ \tfrac{\partial}{\partial x} \ (D \ \tfrac{\partial \rho}{\partial x}) \ = \ 0, \qquad (2.3.2.15a)$$

$$D \ = \ \frac{\nu \ \sigma}{4} \ , \qquad (2.3.2.15b)$$

equação análoga à **equação de Fokker-Planck**.

Definindo-se:[8]

$$\vartheta_{qu} \ = \ v_{qu} \ - \ \frac{D}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ , \qquad (2.3.2.16)$$

e substituindo-se na expressão (2.3.2.15a), virá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\rho \ (v_{qu} \ - \ \frac{D}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial x})] = \ 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \frac{\partial (\rho \ \vartheta_{qu})}{\partial x} \ = \ 0 \ . \qquad (2.3.2.17)$$

A integração da expressão (2.3.2.17) é feita semelhantemente aos casos anteriores, uma vez que ela é análoga às expressões (2.2.1.3), (2.2.2.2), (2.2.3.2) e (2.3.1.2). Desse modo, poderemos escrever que:

$$\vartheta_{qu}(x, \ t) \ = \ \frac{\dot{\sigma}(t)}{2 \ \sigma(t)} \ [x \ - \ q(t)] \ + \ \dot{q}(t) \ . \qquad (2.3.2.18)$$

Considerando-se as expressões (2.3.2.13,15b,16,18), teremos:

$$\vartheta_{qu} \ = \ v_{qu} - \frac{D}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ = \ v_{qu} + \frac{2 \ \nu \ \sigma \ (x \ - \ q)}{4 \ \sigma} \ = \ v_{qu} + \frac{\nu \ (x \ - \ q)}{2} \quad \rightarrow$$

$$v_{qu} \ = \ \vartheta_{qu} \ - \ \frac{\nu \ (x \ - \ q)}{2} \ = \ \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q} \ - \ \frac{\nu \ (x \ - \ q)}{2} \quad \rightarrow$$

$$v_{qu} \ = \ \frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q} \ . \qquad (2.3.2.19)$$

De posse da expressão (2.3.2.19), calcularemos as seguintes derivadas (lembrar que x e t são variáveis independentes):

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ = \ \frac{\partial}{\partial t} \ [\frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q}] =$$

$$= \frac{1}{2} \ [\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{\sigma^2}] \ (x \ - \ q) \ - \ \frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ \dot{q} \ + \ \ddot{q} \ . \qquad (2.3.2.20)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ = \ \frac{\partial}{\partial x} \ [\frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q}] \ =$$

$$= \ \frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ . \qquad (2.3.2.21)$$

Usando-se as expressões (2.3.2.8a,19-21) e somando-se e subtraindo-se o termo ω^2, a expressão (2.3.2.5) tomará a seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \ [\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{\sigma^2}] \ (x \ - \ q) \ - \ \frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ \dot{q} \ + \ \ddot{q} \ +$$

$$+ \ [\frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q}] \ \frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ +$$

$$+ \ \nu \ [\frac{1}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q}] \ + \ \omega^2 \ x \ +$$

$$+ \ \omega^2 \ q \ - \ \omega^2 \ q \ = \ \frac{\hbar^2}{m^2 \ \sigma^2} \ (x \ - \ q) \quad \rightarrow$$

$$\Big(\ \frac{1}{2} \ [\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{\sigma^2}] \ + \ \frac{1}{4} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu)^2 \ + \ \frac{\nu}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ +$$

$$+ \ \omega^2 \ - \ \frac{\hbar^2}{m^2 \ \sigma^2} \ \Big) \ (x \ - \ q) \ + \ \ddot{q} \ + \ \nu \ \dot{q} \ + \ \omega^2 \ q \ =$$

$$= \ \Big(\ \frac{\ddot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ - \ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2 \ \sigma^2} \ + \ \frac{1}{4} \ [\frac{(\dot{\sigma})^2}{\sigma^2} \ - \ \frac{2 \ \dot{\sigma} \ \nu}{\sigma} \ + \ \nu^2] \ +$$

$$+ \ \frac{\nu}{2} \ (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ - \ \nu) \ + \ \omega^2 \ - \ \frac{\hbar^2}{m^2 \ \sigma^2} \ \Big) \ (x \ - \ q) \ +$$

$$+ \ \ddot{q} \ + \ \nu \ \dot{q} \ + \ \omega^2 \ q \ = \ 0 \quad \rightarrow$$

$$[\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma} \ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2} \ +\ \omega^2 \ -\ \frac{\nu^2}{4} \ -\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2}]\ (x\ -\ q)\ +$$

$$+\ \ddot{q}\ +\ \nu\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q\ =\ 0\ . \qquad (2.3.2.22)$$

Para que a expressão (2.3.2.22) seja identicamente nula, é necessário que tenhamos:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma} \ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2} \ +\ \omega^2 \ -\ \frac{\nu^2}{4} \ -\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2} \ =\ 0\ , \qquad (2.3.2.23)$$

$$\ddot{q}\ +\ \nu\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q\ =\ 0\ . \qquad (2.3.2.24)$$

Tomando-se a expressão (2.3.2.23) e inserindo-se nela as expressões (2.2.1.36,37a-b), e em analogia com os casos anteriores, obteremos:

$$\ddot{\alpha}\ +\ [\omega^2\ -\ \frac{\nu^2}{4}]\ \alpha\ =\ \frac{1}{\alpha^3}\ . \qquad (2.3.2.25)$$

Agora, chamando-se:[8]

$$q(t)\ =\ u(t)\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ , \qquad (2.3.2.26)$$

virá:

$$\dot{q}\ =\ \dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ u\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ =$$

$$=\ \dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ q\ , \qquad (2.3.2.27a)$$

$$\ddot{q}\ =\ \ddot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ \dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ \dot{q}\ =\ \ddot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -$$

$$-\ \frac{\nu}{2}\ \dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ (\dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ u\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}})\ =$$

$$=\ddot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ \dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ -\ \frac{\nu}{2}\ \dot{u}\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ +\ \frac{\nu^2}{4}\ u\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ \ \rightarrow$$

$$\ddot{q} \;=\; e^{-\,\frac{\nu\,t}{2}}\;(\ddot{u} \;-\; \nu\,\dot{u} \;+\; \tfrac{\nu^2}{4}\,u)\;. \qquad (2.3.2.27b)$$

Considerando-se a expressão (2.3.2.24) e substituindo-se nela as expressões (2.3.2.26,27a-b), obteremos:

$$e^{-\,\frac{\nu\,t}{2}}\;(\ddot{u} \;-\; \nu\,\dot{u} \;+\; \tfrac{\nu^2}{4}\,u) \;+\; \nu\,e^{-\,\frac{\nu\,t}{2}}\;(\dot{u} \;-\; \tfrac{\nu}{2}\,u) \;+$$

$$+\;\omega^2\,u\,e^{-\,\frac{\nu\,t}{2}} \;=\; \ddot{u} \;-\; \nu\,\dot{u} \;+\; \tfrac{\nu^2}{4}\,u \;+$$

$$+\;\nu\,\dot{u} \;-\; \tfrac{\nu^2}{2}\,u \;+\; \omega^2\,u \;=\; 0 \quad \rightarrow$$

$$\ddot{u} \;+\; [\omega^2 \;-\; \tfrac{\nu^2}{4}]\,u \;=\; 0\;. \qquad (2.3.2.28)$$

Eliminando-se o fator comum $(\omega^2 \;-\; \frac{\nu^2}{4})$ entre as expressões (2.3.2.25,28), teremos:

$$\ddot{\alpha} \;-\; \tfrac{\ddot{u}}{u}\,\alpha \;=\; \tfrac{1}{\alpha^3} \quad \rightarrow \quad u\,\ddot{\alpha} \;-\; \alpha\,\ddot{u} \;=\; \tfrac{u}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dt}\,(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u}) \;=\; \tfrac{u}{\alpha^3} \quad \rightarrow$$

$$(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u})\,\tfrac{d}{dt}\,(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u}) \;=\; \tfrac{u}{\alpha^3}\,(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u}) \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\,\tfrac{d}{dt}\,[(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u})^2] \;=\; -\,\tfrac{u}{\alpha}\,\tfrac{d}{dt}\,(\tfrac{u}{\alpha}) \;=\; -\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{d}{dt}\,(\tfrac{u}{\alpha})^2 \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dt}\,\Big(\,\tfrac{1}{2}\,[(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u})^2 \;+\; (\tfrac{u}{\alpha})^2]\,\Big) \;=\; 0 \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{dI}{dt} \;=\; 0\,, \qquad I \;=\; \tfrac{1}{2}\,[(u\,\dot{\alpha} \;-\; \alpha\,\dot{u})^2 \;+\; (\tfrac{u}{\alpha})^2]\;. \qquad (2.3.2.29a\text{-}b)$$

Considerando-se a expressão (2.3.2.26), resultará:

$$u \;=\; q\,e^{\frac{\nu\,t}{2}}\;, \qquad (2.3.2.30a)$$

$$\dot{u} \ = \ \dot{q} \ e^{\frac{\nu \ t}{2}} \ + \ \frac{\nu}{2} \ q \ e^{\frac{\nu \ t}{2}} \ = \ e^{\frac{\nu \ t}{2}} \ (\dot{q} \ + \ \frac{\nu}{2} \ q) \ . \qquad (2.3.2.30b)$$

Tomando-se a expressão (2.3.2.30b) e inserindo-se nela as expressões (2.3.2.29a-b), resultará:

$$I \ = \ \frac{1}{2} \ e^{\nu \ t} \ [(\dot{q} \ \alpha \ - \ q \ \dot{\alpha} \ + \ \frac{\nu}{2} \ q \ \alpha)^2 \ + \ (\frac{q}{\alpha})^2] \ , \qquad (2.3.2.31)$$

que representa o **invariante de Ermakov-Lewis-Schuch-Chung-Hartmann** para o $OHDT$.

Portanto, a expressão (2.3.2.29a) nos mostra que a **equação de Schuch-Chung-Hartmann** possui um **invariante de Ermakov-Lewis** para o $OHDT$.

2.3.3. Equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar

Para o caso do $OHDT$, a **equação de Süssmann-Hasse-Albrecht-Kostin-Nassar** ficará com a seguinte forma [vide expressões (1.3.3.1) e (2.1.0.4)]:

$$i \ \hbar \ \frac{\partial}{\partial t} \ \psi(x, \ t) \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2 \psi(x, \ t)}{\partial x^2} \ + \ \Big[\ \frac{1}{2} \ m \ \omega^2(t) \ x^2 \ +$$

$$+ \ \nu \ \Big([x - \ < \ x \ >] \ [c \ \hat{p} \ + \ (1 \ - \ c) < \hat{p} >] \ -$$

$$- \ \frac{1}{2} \ i \ \hbar c \Big) \Big] \ \psi(x, \ t) \ , \qquad (2.3.3.1)$$

onde $\hat{p}$ é o tradicional operador de momento linear [vide expressão (1.3.3.2)], $\psi(x, \ t)$ representa, como nos casos anteriores, a função de onda, e c é uma constante, cujos casos particulares foram considerados no item 1.3.3.

Também, como nos casos vistos anteriormente, usando-se a **transformação de Madelung-Bohm**, dada pela expressão (2.2.1.2), e aplicando-a à expressão (2.3.3.1), mostramos no Capítulo 1, para o caso geral de $V(x, \ t)$, que [vide expressões (1.3.3.10,13)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \ \vartheta_{qd})}{\partial x} = 0 \ , \qquad (2.3.3.2)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} + \vartheta_{qd} \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) =$$

$$= - \nu \ [c \ (v_{qu} - \vartheta_{qd}) + < \vartheta_{qd} >] \ , \qquad (2.3.3.3a)$$

onde ϑ_{qd} e V_{qu} são dados, respectivamente, pelas expressões (1.3.3.8a) e (2.2.1.7a-b).

Usando-se as expressões (1.3.3.8a) e (2.1.0.4), a expressão acima tomará a seguinte forma:

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} + \vartheta_{qd} \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (\tfrac{1}{2} \ m \ \omega^2 \ x^2 + V_{qu}) =$$

$$= - \nu \ [- \nu \ c^2 \ (x - < x >) + < \vartheta_{qd} >] \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} + \vartheta_{qd} \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} + \nu < \vartheta_{qd} > + \omega^2 \ x =$$

$$= - \frac{1}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} + (\nu \ c)^2 \ (x - < x >) \ .$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $\omega^2 < x >$ na expressão acima, virá (lembrar que $\frac{\partial < x >}{\partial x} = 0$):

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} + \vartheta_{qd} \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} + \nu < \vartheta_{qd} > + \omega^2 \ (x - < x >) +$$

$$+ \omega^2 < x > = - \frac{1}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} + (\nu \ c)^2 \ (x - < x >) \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} + \vartheta_{qd} \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} + \nu < \vartheta_{qd} > + \omega^2 < x > =$$

$$= - \frac{1}{m} \frac{\partial V_{qu}}{\partial x} - [\omega^2 - (\nu \ c)^2] \ (x - < x >) \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} + \vartheta_{qd} \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} + \nu < \vartheta > + \omega^2 < x > =$$

$$= - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} [\ V_{qu} \ + \ \frac{1}{2} \ m \ \Omega^2(t) \ (x - \ < x >)^2 \ ] \ , \qquad (2.3.3.3b)$$

$$\Omega^2(t) \ = \ \omega^2(t) \ - \ (\nu \ c)^2 \ , \qquad (2.3.3.3c)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento utilizado na integração das expressões (2.2.1.8), (2.2.2.4), (2.2.3.6), (2.3.1.4) e (2.3.2.4), e usando-se a expressão (1.2.1.11a), a integração da expressão (2.3.3.3b) nós dará [lembrar que $< x > = \ q(t)$, segundo a expressão (2.2.1.9c)]:

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t} \ + \ \vartheta_{qd} \ \frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x} \ + \ \nu \ < \vartheta_{qd} > \ + \omega^2 \ q(t) \ =$$

$$= \ k(t) \ [x \ - \ q(t)] \ , \qquad (2.3.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) \ - \ \Omega^2(t) \ [x \ - \ q(t)] \ =$$

$$= \ k(t) \ [x \ - \ q(t)] \ . \qquad (2.3.3.5)$$

Em analogia com o que foi realizado no item 2.1.1. a expressão (2.3.3.5) será escrita da seguinte forma [ver expressões (2.2.1.12,16,17a-c)]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ (\frac{\hbar^2}{2 \ m^2} \ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}) \ - \ \Omega^2(t) \ [x \ - \ q(t)] \ = \ k(t) \ [x \ - \ q(t)] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 \ m^2} \ [\frac{1}{\rho} \ \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} \ - \ \frac{2}{\rho^2} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ + \ \frac{1}{\rho^3} \ (\frac{\partial \rho}{\partial x})^3] \ -$$

$$- \ \Omega^2(t) \ [x \ - \ q(t)] \ = \ k(t) \ [x \ - \ q(t)] \ , \qquad (2.3.3.6)$$

$$\frac{\hbar^2}{m^2} \ \frac{[x \ - \ q(0)]}{\sigma^2(0)} \ - \ \Omega^2(0) \ [x \ - \ q(0)] \ =$$

$$= \ [\frac{\hbar^2}{m^2 \sigma^2(0)} \ - \ \Omega^2(0)] \ [x \ - \ q(0)] =$$

$$= k(0)\ [x\ -\ q(0)]\quad \rightarrow\quad k(0)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(0)}\ -\ \Omega^2(0)\quad \rightarrow$$

$$\sigma^2(0)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2}\ \frac{1}{k(0)\ +\ \Omega^2(0)}\quad \rightarrow$$

$$k(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(t)}\ -\ \Omega^2(t)\ , \qquad (2.3.3.7a)$$

$$\sigma^2(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{m^2}\ \frac{1}{k(t)\ +\ \Omega^2(t)}\ , \qquad (2.3.3.7b)$$

$$\rho(x,\ t)\ =\ [\pi\ \sigma(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma(t)}}\ . \qquad (2.3.3.7c)$$

Para integrarmos a expressão (2.3.3.2) deveremos seguir o mesmo protocolo empregado na integração da expressão (2.2.1.3). Assim, virá [vide expressões (2.2.1.30b,31-32)]:

$$\vartheta_{qd}(x\ ,\ t)\ =\ \frac{\dot{\sigma}(t)}{2\ \sigma(t)}\ [x\ -\ q(t)]\ +\ \dot{q}(t)\ , \qquad (2.3.3.8a)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial t}\ =\ \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -$$

$$-\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ , \qquad (2.3.3.8b)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{qd}}{\partial x}\ =\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ . \qquad (2.3.3.8c)$$

Considerando-se as expressões (1.3.3.12a) e (2.2.1.9c), virá:

$$< \vartheta_{qd} > = <\ v_{qu}\ > = <\ \dot{x}\ > =\ \dot{q}\ . \qquad (2.3.3.9)$$

Assim, considerando-se a expressão (2.3.3.4), substituindo-se nela as expressões (2.3.3.7a,8a-c,9) e considerando-se a expressão (2.3.3.3c), resultará:

$$\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ +$$

$$+\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}]\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \nu\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q =$$

$$= \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ +\ \ddot{q}\ +$$

$$+\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ +\ \nu\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q =$$

$$= (\frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2}\ -\ \Omega^2)\ (x\ -\ q)\ \ \rightarrow$$

$$[\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4\ \sigma^2}\ +\ \omega^2\ -\ \nu^2\ c^2\ -\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2}]\ (x\ -\ q)\ +$$

$$+\ \ddot{q}\ +\ \nu\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q = 0\ . \qquad (2.3.3.10)$$

Usando-se as expressões (2.2.1.36) e (2.3.2.26), ou seja:

$$\sigma\ =\ \frac{\hbar}{m}\ \alpha^2\ , \qquad q\ =\ e^{-\ \frac{\nu\ t}{2}}\ u\ , \qquad (2.3.3.11\text{a-b})$$

e em analogia com os casos anteriores, encontraremos que [em analogia com as expressões (2.3.2.25,28)]:

$$\ddot{\alpha}\ +\ [\omega^2\ -\ \nu^2\ c^2]\ \alpha\ =\ \frac{1}{\alpha^3}\ , \qquad (2.3.3.12)$$

$$\ddot{q}\ +\ \nu\ \dot{q}\ +\ \omega^2\ q = 0\ , \qquad (2.3.3.13)$$

$$\ddot{u}\ +\ [\omega^2\ -\ \frac{\nu^2}{4}]\ u = 0\ . \qquad (2.3.3.14)$$

Examinando-se as expressões (2.3.3.12,14), observa-se que estas só possuem um **invariante de Ermakov-Lewis** no caso do **modelo de Hasse**, para o qual $c\ =\ \frac{1}{2}$, já que, para esse valor particular de c, a expressão (2.3.3.12) coincide com a expressão (2.3.2.25) e, portanto, valem as expressões (2.3.2.29a,31):

$$\frac{dI}{dt} \;=\; 0 \;, \qquad (2.3.3.14)$$

$$I \;=\; \frac{1}{2}\; e^{\nu\; t}\; [(\dot{q}\; \alpha \;-\; q\; \dot{\alpha} \;+\; \frac{\nu}{2}\; q\; \alpha)^2 \;+\; (\frac{q}{\alpha})^2] \;. \qquad (2.3.3.15)$$

Em geral, para quaisquer valores de c e de ν nas expressões (2.3.3.12-13) como, por exemplo, $c \;=\; 1$ (**modelo de Süssmann**) e $c \;=\; 0$ (**modelo de Albrecht-Kostin**), nenhum **invariante de Ermakov-Lewis** poderá ser obtido.[8] Para esses modelos, pode-se obter um invariante aproximado, somente para o caso em que se tenha:

$$c^2\; \nu^2 \quad \ll \quad \omega^2 \;, \qquad (2.3.3.16)$$

pois, com essa condição, as expressões (2.3.3.12-13) tomarão o seguinte aspecto:

$$\ddot{\alpha} \;+\; \omega^2\; \alpha \;=\; \frac{1}{\alpha^3} \;, \qquad \ddot{q} \;+\; \omega^2\; q = 0 \;, \qquad (2.3.3.17\text{-}18)$$

expressões essas que coincidem com as expressões (2.1.0.2-3) e, portanto, correspondem a um **invariante de Ermakov-Lewis** do tipo:

$$\frac{dI}{dt} \;=\; 0 \;, \qquad I \;=\; \frac{1}{2}\; [(\dot{q}\; \alpha \;-\; q\; \dot{\alpha})^2 \;+\; (\frac{q}{\alpha})^2] \;. \qquad (2.3.3.19\text{-}20)$$

2.3.4. Equação de Diósi-Halliwell

Para o caso do $OHDT$, a **equação de Diósi-Halliwell** ficará com a seguinte forma [vide expressões (1.3.4.1) e (2.1.0.4)]:

$$i\; \hbar\; \frac{\partial}{\partial t}\; \psi(x,\; t) \;=\; -\; \frac{\hbar^2}{2\; m}\; \frac{\partial^2 \psi(x,\; t)}{\partial x^2} \;+\; \Big(\; \frac{1}{2}\; m\; \omega(t)^2\; x^2 \;-$$

$$-\; i\; \hbar\; \Big[\; \frac{(x \;-\; <x>)^2}{a^2} \;-\; \frac{\eta(t)\; (x \;-\; <x>)}{a}\; \Big]\; \Big)\; \psi(x,\; t) \;, \qquad (2.3.4.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$, como nos casos anteriores, representa a função de onda, e a é uma constante.

Seguindo-se os casos anteriores, aplicando-se a **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (2.2.1.2)] à expressão (2.3.4.1) e considerando-se a expressão (2.1.0.4), as expressões (1.3.4.5-6) deduzidas no item 1.3.4., nos permitem escrever que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho\ v_{qu})}{\partial x} =$$

$$= -\ 2\ \rho\ \hbar \left[\frac{(x\ -\ <x>)^2}{a^2} - \frac{\eta(t)\ (x\ -\ <x>)}{a} \right], \qquad (2.3.4.2)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} + v_{qu}\ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \omega^2\ x =$$

$$= -\ \frac{1}{m}\ \frac{\partial V_{qu}}{\partial x}\ , \qquad (2.3.4.3)$$

onde v_{qu} e V_{qu} são dados, respectivamente, pelas expressões (2.2.1.6,7a-b).

A integração da expressão (2.3.4.3) seguirá o mesmo protocolo utilizado na integração da expressão (2.2.1.8) uma vez que elas são idênticas. Desse modo, considerando-se as expressões (2.2.1.17a-c,18,19), poderemos escrever que:

$$k(t) = \frac{\hbar^2}{m^2\ \sigma^2(t)} \rightarrow \sigma^2(t) = \frac{\hbar^2}{m^2\ k(t)}\ , \qquad (2.3.4.4a\text{-}b)$$

$$\rho(x,\ t) = [\pi\ \sigma(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ q(t)]^2}{\sigma(t)}}\ , \qquad (2.3.4.4c)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\ \frac{\dot{\sigma}\ \rho}{2\ \sigma} + \rho\ [\frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma^2}\ \dot{\sigma} + \frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \dot{q}]\ , \qquad (2.3.4.5a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\ \frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \rho\ . \qquad (2.3.4.5b)$$

Tomando-se a expressão (2.3.4.2) e usando-se as expressões (2.2.1.9c) e (2.3.4.4a-c,5a-b), virá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \ v_{qu})}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + v_{qu} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} =$$

$$= - 2 \ \rho \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x - q)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - q)}{a} \ \Big] \ \to$$

$$\frac{1}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} + \frac{v_{qu}}{\rho} \ \frac{\partial \rho}{\partial x} =$$

$$= - 2 \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x - q)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - q)}{a} \ \Big] \ \to$$

$$- \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} \ (x - q)^2 + \frac{2 \ (x - q)}{\sigma} \ \dot{q} + \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{2 \ (x - q)}{\sigma} \ v_{qu} =$$

$$= - 2 \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x - q)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - q)}{a} \ \Big] \ \to$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x} - \frac{2 \ (x - q)}{\sigma} \ v_{qu} = \frac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} \ (x - q)^2 -$$

$$- \frac{2 \ (x - q)}{\sigma} \ \dot{q} - 2 \ \hbar \ \Big[\ \frac{(x - q)^2}{a^2} - \frac{\eta(t) \ (x - q)}{a} \ \Big] \ . \qquad (2.3.4.6)$$

Chamando-se:

$$p(x, \ t) = - 2 \ \frac{(x - q)}{\sigma} \ , \qquad (2.3.4.7a)$$

$$r(x, \ t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{2 \ \sigma(t)} - [x - q(t)]^2 \ [\frac{\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)^2} + \frac{2 \ \hbar}{a^2}] +$$

$$+ [x - q(t)] \ [\frac{2 \ \hbar \ \eta(t)}{a} - \frac{2 \ \dot{q}(t)}{\sigma(t)}] \ , \qquad (2.3.4.7b)$$

a expressão (2.3.4.6) ficará:

$$\frac{\partial v_{qu}(x, \ t)}{\partial x} + p(x, \ t) \ v_{qu}(x, \ t) = r(x, \ t) \ . \qquad (2.3.4.8)$$

A solução da equação diferencial representada pela expressão (2.3.4.8) será [vide expressão (2.2.1.23a):

$$v_{qu} \;=\; \frac{1}{u} \; [\int \; r \; u \; \partial x \; + \; c(t)] \; , \qquad (2.3.4.9a)$$

onde [vide expressões (2.2.1.23b,24) e

$$u \;=\; exp \; (\int \; p \; \partial x) \;=\; (\pi \; \sigma)^{1/2} \; \rho \; . \qquad (2.3.4.9b)$$

Usando-se as expressões (2.3.4.7b,9b), poderemos escrever que:

$$I \;=\; \int \; r \; u \; \partial x \;=\; \int \; [\frac{\dot{\sigma}}{2 \; \sigma} \;-\; (x \;-\; q)^2 \; (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} \;+\; \frac{2 \; \hbar}{a^2}) \; +$$

$$+ \; 2 \; (x \;-\; q) \; (\frac{\hbar \; \eta}{a} \;-\; \frac{\dot{q}}{\sigma})] \; (\pi \; \sigma)^{1/2} \; \rho \; \partial x \;\; \equiv$$

$$\equiv \;\; I_1 \;+\; I_2 \;+\; I_3 \; , \qquad (2.3.4.10)$$

onde:

$$I_1 \;=\; \int \; [\frac{\dot{\sigma}}{2 \; \sigma} \;-\; (x \;-\; q)^2 \; (\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2})] \; (\pi \; \sigma)^{1/2} \; \rho \; \partial x \; , \qquad (2.3.4.11)$$

$$I_2 \;=\; - \int \; (x \;-\; q)^2 \; \frac{2 \; \hbar}{a^2} \; (\pi \; \sigma)^{1/2} \; \rho \; \partial x \;=$$

$$= \; (\pi \; \sigma)^{1/2} \; F(x, \; t) \; , \qquad (2.3.4.12a)$$

$$F(x, \; t) \;=\; - \int \; (x \;-\; q)^2 \; \frac{2 \; \hbar}{a^2} \; \rho \; \partial x \; , \qquad (2.3.4.12b)$$

$$I_3 \;=\; \int \; 2 \; (x \;-\; q) \; (\frac{\hbar \; \eta}{a} \;-\; \frac{\dot{q}}{\sigma}) \; (\pi \; \sigma)^{1/2} \; \rho \; \partial x \; . \qquad (2.3.4.13)$$

As integrais indicadas nas expressões (2.3.4.11,13) são obtidas em analogia com as expressões (2.2.1.25b-c). Desse modo, virá [vide expressões (2.2.1.19,27)]:

$$I_1 \ = \ (\pi \ \sigma)^{1/2} \ \rho \ (\tfrac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma}) \ (x \ - \ q) \ , \qquad (2.3.4.14)$$

$$I_3 \ = \ (\tfrac{\hbar \ \eta}{a} \ - \ \tfrac{\dot{q}}{\sigma}) \ (\pi \ \sigma)^{1/2} \int 2 \ (x \ - \ q) \ \rho \ \partial x \ =$$

$$= \ - \ (\tfrac{\hbar \ \eta}{a} \ - \ \tfrac{\dot{q}}{\sigma}) \ (\pi \ \sigma)^{1/2} \ \sigma \int \tfrac{\partial \rho}{\partial x} \ \partial x \quad \rightarrow$$

$$I_3 \ = \ - \ (\tfrac{\hbar \ \eta}{a} \ - \ \tfrac{\dot{q}}{\sigma}) \ (\pi \ \sigma)^{1/2} \ \sigma \ \rho \ . \qquad (2.3.4.15)$$

Tomando-se a expressão (2.3.4.10) e substituindo-se na mesma as expressões (2.3.4.12a,14,15), teremos:

$$I \ = \ \int r \ u \ \partial x \ = \ (\pi \ \sigma)^{1/2} \ \rho \ [(\tfrac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma}) \ (x \ - \ q) \ + \ \tfrac{F(x, \ t)}{\rho} \ -$$

$$- \ (\tfrac{\hbar \ \eta}{a} \ - \ \tfrac{\dot{q}}{\sigma}) \ \sigma] \ . \qquad (2.3.4.16)$$

Usando-se as expressões (2.3.4.9a-b,16) e considerando-se que $c(t) \ = \ 0$, pois $\rho \rightarrow 0$, quando $\mid x \mid \rightarrow \infty$, resultará:

$$v_{qu}(x, \ t) \ = \ \tfrac{\dot{\sigma}(t)}{2 \ \sigma(t)} \ [x \ - \ q(t)] \ + \ \dot{q}(t) \ +$$

$$+ \ \tfrac{F(x, \ t)}{\rho} \ + \ G(t) \ , \qquad (2.3.4.17a)$$

onde:

$$G(t) \ = \ - \ \tfrac{\hbar \ \eta(t) \ \sigma(t)}{a} \ . \qquad (2.3.4.17b)$$

Calculando-se a derivada parcial temporal da expressão (2.3.4.17a), virá (lembrar que x e t são variáveis independentes):

$$\tfrac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ = \ \tfrac{\partial}{\partial t} \ [\tfrac{\dot{\sigma}}{2 \ \sigma} \ (x \ - \ q) \ + \ \dot{q} \ + \ \tfrac{F}{\rho} \ + \ G] \ =$$

$$= \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ +\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial t}\ +$$

$$+\ F\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\tfrac{1}{\rho})\ +\ \dot{G}\ =\ \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +$$

$$+\ \ddot{q}\ +\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial t}\ -\ \frac{F}{\rho^2}\ \frac{\partial \rho}{\partial t}\ +\ \dot{G}\ .$$

Usando-se a expressão (2.3.4.5a) na expressão acima, obteremos:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ =\ \frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ (x\ -\ q)\ -\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ \dot{q}\ +\ \ddot{q}\ +$$

$$+\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial t}\ -\ \frac{F}{\rho^2}\ \Big(\ -\ \frac{\dot{\sigma}\ \rho}{2\ \sigma}\ +\ \rho\ [\frac{(x\ -\ q)^2}{\sigma^2}\ \dot{\sigma}\ +\ \frac{2\ (x\ -\ q)}{\sigma}\ \dot{q}]\ \Big)\ +\ \dot{G}\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\ =\ -\ (x\ -\ q)^2\ \frac{F\ \dot{\sigma}}{\sigma^2\ \rho}\ +\ (x\ -\ q)\ [\frac{\ddot{\sigma}}{2\ \sigma}\ -\ \frac{(\dot{\sigma})^2}{2\ \sigma^2}\ -\ \frac{2\ \dot{q}\ F}{\sigma\ \rho}]\ -$$

$$-\ \frac{\dot{\sigma}\ \dot{q}}{2\ \sigma}\ +\ \ddot{q}\ +\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial t}\ +\ \frac{F\ \dot{\sigma}}{2\ \sigma\ \rho}\ +\ \dot{G}\ . \qquad (2.3.4.18)$$

Agora, calculemos a derivada parcial espacial da expressão (2.3.4.17a). Assim, usando-se a expressão (2.3.4.5b), resultará:

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ (x\ -\ q)\ +\ \dot{q}\ +\ \frac{F}{\rho}\ +\ G]\ =$$

$$=\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial x}\ +\ F\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\tfrac{1}{\rho})\ =$$

$$=\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial x}\ -\ \frac{F}{\rho^2}\ \frac{\partial \rho}{\partial x}\ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\ =\ \frac{\dot{\sigma}}{2\ \sigma}\ +\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial F}{\partial x}\ +\ \frac{2\ F}{\sigma\ \rho}\ (x\ -\ q)\ . \qquad (2.3.4.19)$$

Tomando-se a expressão (2.3.4.3), inserindo-se na mesma as expressões (2.3.4.17a,18,19), considerando-se as expressões (2.2.1.10) e (2.3.4.4a), e somando-se e subtraindo-se o termo $\omega^2\ q$, teremos:

$$- (x - q)^2 \frac{F \dot{\sigma}}{\sigma^2 \rho} + (x - q) [\frac{\ddot{\sigma}}{2 \sigma} - \frac{(\dot{\sigma})^2}{2 \sigma^2} - \frac{2 \dot{q} F}{\sigma \rho}] -$$

$$- \frac{\dot{\sigma} \dot{q}}{2 \sigma} + \ddot{q} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{F \dot{\sigma}}{2 \sigma \rho} + \dot{G} +$$

$$+ [\frac{\dot{\sigma}}{2 \sigma} (x - q) + \dot{q} + \frac{F}{\rho} + G] [\frac{\dot{\sigma}}{2 \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial x} +$$

$$+ \frac{2 F}{\sigma \rho} (x - q)] + \omega^2 x + \omega^2 q - \omega^2 q = \frac{\hbar^2}{m^2 \sigma^2} (x - q) \rightarrow$$

$$- (x - q)^2 \frac{F \dot{\sigma}}{\sigma^2 \rho} + (x - q) [\frac{\ddot{\sigma}}{2 \sigma} - \frac{(\dot{\sigma})^2}{2 \sigma^2} - \frac{2 \dot{q} F}{\sigma \rho}] -$$

$$- \frac{\dot{\sigma} \dot{q}}{2 \sigma} + \ddot{q} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{F \dot{\sigma}}{2 \sigma \rho} + \dot{G} +$$

$$+ \frac{(\dot{\sigma})^2}{4 \sigma^2} (x - q) + \frac{\dot{\sigma}}{2 \sigma \rho} \frac{\partial F}{\partial x} (x - q) + \frac{F \dot{\sigma}}{\sigma^2 \rho} (x - q)^2 +$$

$$+ (\frac{\dot{\sigma}}{2 \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial x}) \dot{q} + \frac{2 F}{\sigma \rho} \dot{q} (x - q) +$$

$$+ \frac{F \dot{\sigma}}{2 \sigma \rho} + \frac{F}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2 F^2}{\sigma \rho^2} (x - q) +$$

$$+ \frac{G \dot{\sigma}}{2 \sigma} + \frac{G}{\rho} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2 F G}{\sigma \rho} (x - q) +$$

$$+ \omega^2 (x - q) + \omega^2 q = \frac{\hbar^2}{m^2 \sigma^2} (x - q) \rightarrow$$

$$(x - q) [\frac{\ddot{\sigma}}{2 \sigma} - \frac{(\dot{\sigma})^2}{4 \sigma^2} + \omega^2 - \frac{\hbar^2}{m^2 \sigma^2} + H(x, t)] +$$

$$+ \ddot{q} + \dot{q} I(x, t) + \omega^2 q + J(x, t) = 0 , \qquad (2.3.4.20)$$

onde:

$$H(x, t) = \frac{\dot{\sigma}}{2 \sigma \rho} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2 F^2}{\sigma \rho^2} + \frac{2 F G}{\sigma \rho} , \qquad (2.3.4.21a)$$

$$I(x,\ t) \ = \ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial F}{\partial x}\ , \qquad (2.3.4.21b)$$

$$J(x,\ t) \ = \ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial F}{\partial t} \ + \ \frac{F}{\sigma}\,\frac{\dot{\sigma}}{\rho} \ + \ \dot{G} \ + \ \frac{F}{\rho^2}\,\frac{\partial F}{\partial x} \ +$$

$$+ \ \frac{G}{2}\,\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \ + \ \frac{G}{\rho}\,\frac{\partial F}{\partial x}\ . \qquad (2.3.4.21c)$$

Comparando-se as expressões (2.2.2.11) e (2.3.4.20) é fácil ver que a **equação de Diósi-Halliwell** não possui um **invariante de Ermakov-Lewis** para o $OHDT$.

É oportuno observar que como a integração da expressão (2.3.4.12b) envolve termos do tipo $(x \ - \ q)$, certamente a expressão (2.3.4.20) conterá potências mais altas desse monômio e, portanto, a existência ou não de **pacotes de onda** como solução da **equação de Diósi-Halliwell**, é uma questão a examinar.

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. LEWIS, H. R. 1967. *Physical Review Letters 18*, 510; 636 (E).

2. ERMAKOV, V. P. 1880. *Univ. Izv. Kiev 20*, 1.

3. Veja algumas referências desses trabalhos em: NASSAR, A. B. 1986a. *Journal of Mathematical Physics 27*, 755.

4. NASSAR, A. B. 1984a. *Physics Letters A 106*, 43; —— 1984b. *Lettere Nuovo Cimento 41*, 476.

5. LUTZKY, M. 1980. *Journal of Mathematical Physics 21*, 1370; WOLLENBURG, L. S. 1980. *Physics Letters A 79*, 269; REID, J. L. and RAY, J. R. 1980. *Journal of Mathematical Physics 21*, 1583; —— 1982. *Journal of Mathematical Physics 23*, 503.

6. NASSAR, A. B. 1986c. *Physical Review 33A*, 2134; 3502.

7. GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. W. 1965. **Table of Integrals, Series and Products**, Academic Press.

8. NASSAR, A. B. 1986b. *Journal of Mathematical Physics 27*, 2949.

CAPÍTULO 3

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

E OS PACOTES DE ONDA QUÂNTICOS

3.1. Introdução

Em 1916, o físico alemão Albert Einstein (1879-1955; PNF, 1921) (naturalizado norte-americano) realizou seu famoso estudo sobre a radiação planckiana do corpo negro, no qual propôs que uma radiação eletromagnética de comprimento de onda λ era portadora de um momento linear p, dado pela expressão:

$$\mathrm{p} = \frac{h}{\lambda} \, , \qquad (3.1.0.1)$$

onde **h** é a **constante de Planck**.

Em 1923, o físico francês, o Príncipe Louis Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987; PNF, 1929) formulou suas primeiras idéias sobre a "onda de matéria" associada a uma partícula em movimento. Logo depois, em 1924, ele complementou essa idéia encontrando as relações fundamentais entre a energia e as velocidades de fase e de grupo dessa "onda". Por fim, em 1925, apresentou sua célebre idéia de que o elétron de massa m, em seu movimento orbital atômico com velocidade v, é guiado por uma "onda de matéria" (**onda-piloto**), cujo comprimento de onda λ se relaciona com o momento linear do elétron, por intermédio da expressão:

$$\lambda \; = \; \frac{h}{p} \, , \qquad (p \; = \; m \; v) \qquad (3.1.0.2\text{a-b})$$

de tal modo que: $2 \, \pi \, r \; = \; n \, \lambda$, sendo r o raio da órbita eletrônica.

Em 1926, os físicos alemães Max Born (1882-1970; PNF, 1954), Ernst Pascual Jordan (1902-1980) e Werner Karl Heisenberg (1901-1976; PNF, 1932), e o austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961; PNF, 1933) desenvolveram, respectivamente, a **Mecânica Quântica Matricial** e a **Mecânica Quântica Ondulatória**, hoje traduzida pela célebre **equação de Schrödinger**:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},\ t) = \hat{H} \Psi(\vec{r},\ t) , \qquad (3.1.0.3a)$$

onde $\hat{H}$ é o **operador Hamiltoniano** definido por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\ m} + V(\vec{r},\ t) , \qquad (\hat{p} = -\, i \hbar \nabla) , \qquad (3.1.0.3b\text{-}c)$$

sendo V a **energia potencial**.

Ainda nesse mesmo ano de 1926, Born interpretou a **função de onda de Schrödinger** Ψ como sendo uma **amplitude de probabilidade**. Essa interpretação significava dizer que qualquer observável físico (posição, momento linear, energia etc.) de uma partícula é encontrado por intermédio da **densidade de probabilidade**, calculada pela expressão $\Psi^* \Psi = \mid \Psi \mid^2$. Além do mais, a função de onda Ψ deveria ser normalizada, isto é:

$$\int_{V\infty} \mid \Psi(\vec{r},\ t) \mid^2 d^3\vec{r} = 1 . \qquad (3.1.0.4)$$

A essa interpretação de Born sobrepôs-se uma outra questão. Será sempre possível observar qualquer grandeza física? A resposta a essa pergunta foi dada por Heisenberg. Com efeito, ao tentar representar, matematicamente, a trajetória de um elétron em uma **câmara de névoa** ou **câmara de Wilson**,[1] Heisenberg percebeu que, embora se observe essa trajetória por intermédio de gotinhas de água isoladas na câmara, tais gotinhas, certamente, eram muito mais amplas que um elétron e, desse modo, só se registra uma sucessão

discreta de lugares, imprecisamente determinados, do elétron. Portanto, a verdadeira questão, concluiu Heisenberg, era a de representar, dentro da Mecânica Quântica, uma situação que, de modo aproximado - quer dizer, com certa imprecisão -, possuísse uma determinada velocidade. Foi, basicamente, esse raciocínio que levou Heisenberg a apresentar, em 1927, o seu famoso **princípio da incerteza**:

É impossível obter exatamente os valores simultâneos de duas variáveis canonicamente conjugadas, a não ser dentro de um limite mínimo de exatidão.

Aplicando-se o formalismo da Mecânica Quântica de Born-Jordan-Heisenberg-Schrödinger, a conhecida Mecânica Quântica de Schrödinger (MQS), aos operadores $\hat{F}$ e $\hat{G}$, que representam duas quaisquer quantidades físicas F e G, aquele princípio é dado pelas famosas **relações de incerteza de Heisenberg**:

$$< \ (\Delta F) \ > < \ (\Delta G) \ > \ \geq \frac{1}{2} \, \hbar \ , \qquad (3.1.0.5)$$

onde $< (\Delta F) >$ e $< (\Delta G) >$ representam, respectivamente, os valores médios dos erros nas medidas dos observáveis F e G, e a expressão (3.1.0.5) indica que essas medidas não podem ser efetuadas com precisão, isto é, com erro nulo (a menos do erro inerente à medida experimental).[2] Por outro lado, no formalismo da MQS, os valores médios referidos acima são calculados por intermédio de Ψ.[3] Em vista disso, a questão fundamental dessa MQS seria a de relacionar Ψ com a medida do **observável** desejado. Assim, a transição de um estado Ψ para um estado Ψ' por intermédio de um processo de medida é denominada **redução (colapso) do pacote de onda de Schrödinger**. Portanto, após a medida, obtemos um novo estado correspondente a uma nova função de onda schrödingeriana.

Neste Capítulo, estudaremos a evolução do pacote de onda de Schrödinger usando o formalismo da MQS e o da

Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$), sendo esta desenvolvida no Capítulo 1. Em nosso estudo, consideraremos o caso particular da **partícula livre** (PL).

3.2. Evolução do Pacote de Onda Quântico Via Mecânica Quântica de Schrödinger

3.2.1. Pacote de Onda de Schrödinger-Feynman

Conforme sabemos,[4] quando a energia potencial V de um sistema físico, de energia total E, só depende da posição $[V(\vec{r})]$, então a solução da **equação de Schrödinger** [vide expressões (3.1.0.3a-c)] é dada por:

$$\Psi(\vec{r},\ t) \ = \ \psi(\vec{r})\ e^{-\ i\ \frac{E}{\hbar}\ t} \ = \ \psi(\vec{r})\ e^{-\ i\ \omega\ t}, \qquad (3.2.1.1\text{a-b})$$

onde $\psi(\vec{r})$ satisfaz a seguinte equação, conhecida como **equação de Schrödinger independente do tempo**:

$$\Delta\ \psi(\vec{r}) \ + \ \frac{2\ m}{\hbar^2}\ (E\ -\ V)\ \psi(\vec{r}) \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\hat{H}\ \psi(\vec{r}) \ = \ E\ \psi(\vec{r}), \qquad (3.2.1.2\text{a-b})$$

onde $\hat{H}$ é dado pelas expressões (3.1.0.3b-c). Além do mais, $\psi(\vec{r})$ deve ser finita e contínua, assim como sua derivada $\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$.

É oportuno observar que a expressão (3.2.1.1b) foi obtida considerando-se a **energia planckiana**:

$$E \ = \ h\ \nu \ = \ \hbar\ \omega\ , \qquad (3.2.1.3\text{a-b})$$

$$\hbar \ = \ \frac{h}{2\ \pi}, \qquad \omega \ = \ 2\ \pi\ \nu\ . \qquad (3.2.1.3\text{c-d})$$

Sendo a expressão (3.2.1.2b) uma equação de autovalores, sua solução é dada por um conjunto discreto de autofunções ("ondas schrödingerianas") do operador $\hat{H}$.[5] Por outro lado, a expressão (3.1.0.2a) sugere ser possível usar um

punhado concentrado de “ondas debroglieanas”, de comprimento de onda λ, para descrever partículas localizadas no espaço. Para tal descrição, é necessário usar um mecanismo que reúna essas “ondas” com vários comprimentos de onda; este mecanismo é a Análise de Fourier.[6] Assim, de acordo com essa Análise (para o caso unidimensional), podemos considerar ψ(x) como uma superposição de ondas harmônicas monocromáticas (planas), ou seja:

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\;\pi}} \int_{-\;\infty}^{+\;\infty} \phi(k)\; e^{i\;k\;x}\; dk \;, \qquad (3.2.1.4a)$$

sendo:

$$\phi(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\;\pi}} \int_{-\;\infty}^{+\;\infty} \psi(x')\; e^{-\;i\;k\;x'}\; dx' \;, \qquad (3.2.1.4b)$$

onde:

$$k \;=\; \frac{2\;\pi}{\lambda} \;, \qquad (3.2.1.4c)$$

é o **número de onda**, e representa a transição da descrição <u>discreta</u> para a <u>contínua</u>. Observe-se que, usando-se as expressões (3.1.0.2a), (3.2.1.3c), a expressão (3.2.1.4c) tomará a seguinte forma:

$$k \;=\; 2\;\pi\;\frac{p}{h} \quad\rightarrow\quad p \;=\; \hbar\;k \;. \qquad (3.2.1.4d)$$

Tomando-se a expressão (3.2.1.4a) e inserindo-se na mesma a expressão (3.2.1.4b), virá:

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{2\;\pi} \int_{-\;\infty}^{+\;\infty} \int_{-\;\infty}^{+\;\infty} \psi(x')\; e^{i\;k\;(x-\;x')}\; dx'\; dk \;. \qquad (3.2.1.5)$$

Considerando-se que:[6]

$$\delta(z'\;-\;z) \equiv \delta(z\;-\;z')\;=$$

$$= \frac{1}{2\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} e^{i\ k\ (z-\ z')}\ dk\ , \qquad (3.2.1.6a\text{-}b)$$

$$f(z)\ =\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} f(z')\ \delta(z'\ -\ z)\ dz'\ , \qquad (3.2.1.6c)$$

verifica-se, portanto (considerando-se $z,\ z' \equiv x,\ x'$), a consistência da expressão (3.2.1.5), caracterizada como a famosa **relação de completeza**.

Levando-se a expressão (3.2.1.4a) na representação unidimensional da expressão (3.2.1.1b), resultará na expressão abaixo:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \phi(k)\ e^{i\ [k\ x\ -\ \omega(k)\ t]}\ dk\ , \qquad (3.2.1.7)$$

que representa um **pacote de onda** de amplitude ϕ(k).

Note-se que, a dependência ω em termos de k indicada na expressão acima, decorre do fato de que a energia E de um sistema físico sempre depende de p. Assim, considerando-se esse fato e mais as expressões (3.2.1.3b,4d), essa dependência é verificada imediatamente, conforme veremos adiante.

A seguir, escrevamos a expressão (3.2.1.7) em termos do **propagador de Feynman**. Fazendo-se t = 0 nessa expressão e em analogia com a expressão (3.2.1.4b), teremos:

$$\Psi(x,\ 0)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \phi(k)\ e^{i\ k\ x}\ dk \quad \to$$

$$\phi(k)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \Psi(x',\ 0)\ e^{-\ i\ k\ x'}\ dx'\ . \qquad (3.2.1.8)$$

Inserindo-se essa expressão na expressão (3.2.1.7), resultará:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \Big(\ \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \Psi(x',\ 0)\ e^{-\ i\ k\ x'}\ dx'\ \Big) \times$$

$$\times\ e^{i\ [k\ x\ -\ \omega(k)\ t]}\ dk \quad \to$$

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \left(\frac{1}{2\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} e^{i\ k\ [(x\ -\ x')\ -\ \frac{\omega(k)}{k}\ t]}\ dk \right) \times$$

$$\times\ \Psi(x',\ 0)\ dx'\ . \qquad (3.2.1.9)$$

É oportuno destacar que, na linguagem da Mecânica Quântica de Feynman,[8] o termo entre parênteses na expressão (3.2.1.9) representa o **propagador de Feynman** $K(x,\ x';\ t)$. Assim, essa expressão pode ser escrita na forma:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} K(x,\ x';\ t)\ \Psi(x',\ 0)\ dx'\ , \qquad (3.2.1.10a)$$

sendo:

$$K(x,\ x';\ t)\ =$$

$$=\ \frac{1}{2\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} e^{i\ k\ [(x\ -\ x')\ -\ \frac{\omega(k)}{k}\ t]}\ dk\ . \qquad (3.2.1.10b)$$

A expressão (3.2.1.10a) representa a função de onda Ψ em qualquer instante t em termos dessa mesma função no instante inicial ($t\ =\ 0$). Assim, se ω(k) for uma função conhecida de k, então $\Psi(x,\ t)$ pode ser obtida explicitamente por intermédio de $\Psi(x,\ 0)$.

Na seqüência, determinaremos a forma, a evolução e a dinâmica do pacote dado pelas expressões (3.2.1.10a-b) para duas situações particulares: **partícula livre** (PL) e **oscilador harmônico dependente do tempo** ($OHDT$).

3.2.2. Pacote de Onda da Partícula Livre

Para uma PL de momento linear bem definido $\vec{p}$, a sua energia total E (H) e o seu potencial V, são dados por:

$$E\ =\ \frac{p^2}{2\ m}\ , \qquad V(\vec{r},\ t)\ =\ 0\ . \qquad (3.2.2.1a\text{-}b)$$

a) Pacote de Onda de de Broglie da PL

Consideremos a "onda de de Broglie". Assim, para essa "onda", as expressões (3.1.0.2b), (3.2.1.3b,4d) e (3.2.2.1a), nos mostram que:

$$p \;=\; \hbar\; k \;, \qquad v \;=\; \frac{\hbar\; k}{m} \;, \qquad (3.2.2.2a\text{-}b)$$

$$E \;=\; \frac{\hbar^2\; k^2}{2\; m} \;=\; \hbar\; \omega \quad \rightarrow \quad \omega(k) \;=\; \frac{\hbar\; k^2}{2\; m} \;. \qquad (3.2.2.3a\text{-}c)$$

Usando-se a definição de **velocidade de grupo**:[4]

$$v_g \;=\; \frac{d\omega}{dk} \;, \qquad (3.2.2.4)$$

as expressões (3.2.2.2b,3a-c) indicam que:

$$v_g \;=\; \frac{1}{\hbar}\; \frac{dE}{dk} \;=\; \frac{1}{\hbar}\; \frac{2\; \hbar^2\; k}{2\; m} \;=\; \frac{\hbar\; k}{m} \quad \rightarrow$$

$$v_g \;=\; v \;, \qquad (3.2.2.5)$$

ou seja, a velocidade de grupo da "onda debroglieana" da partícula livre coincide com a sua própria velocidade.

b) Pacote de Ondas Luminosas no Vácuo

Neste caso, usando-se as expressões (3.2.1.3d,4c), teremos (lembrar que no vácuo a luz se propaga com uma velocidade $c \;=\; \lambda\; \nu$):

$$c \;=\; \lambda\; \nu \;=\; \lambda\; \frac{\omega}{2\; \pi} \quad \rightarrow \quad \omega(k) \;=\; k\; c \;. \qquad (3.2.2.6)$$

Tomando-se a expressão (3.2.1.9), inserindo-se nela a expressão (3.2.2.6), e usando-se as expressões (3.2.1.6a-c), resultará:

$$\Psi(x,\; t) \;=\; \int_{-\;\infty}^{+\;\infty} \Big(\; \frac{1}{2\; \pi} \int_{-\;\infty}^{+\;\infty} e^{i\; k\; [(x\; -\; c\; t)\; -\; x']}\; dk \;\Big) \;\times$$

$$\times \ \Psi(x', \ 0) \ dx' \ = \ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \delta[(x \ - \ ct) \ - \ x'] \ \Psi(x', \ 0) \ dx' \quad \rightarrow$$

$$\Psi(x, \ t) \ = \ \Psi(x \ - \ c \ t, \ 0) \ . \qquad (3.2.2.7)$$

A expressão (3.2.2.7) mostra que a função de onda Ψ tem o mesmo valor em $(x, \ t)$ e em $(x \ - \ c \ t, \ 0)$, significando dizer que o pacote luminoso viaja com a velocidade c sem mudar de contorno, ou seja, ele não dispersa.

c) Pacote de Onda de Schrödinger da PL

Para a PL, as expressões (3.1.0.3a-c) e (3.2.2.1a-b) nos mostram que a **equação de Schrödinger** (unidimensional) correspondente será:

$$i \ \hbar \ \frac{\partial}{\partial t} \ \Psi(x, \ t) \ = \ \hat{H} \ \Psi(x, \ t) \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \Psi(x, \ t) \quad \rightarrow$$

$$i \ \hbar \ \frac{\partial}{\partial t} \ \Psi(x, \ t) \ + \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \Psi(x, \ t) \ = \ 0 \ , \qquad (3.2.2.8)$$

cuja solução será o **pacote de onda schrödingeriano** representativo da partícula livre, pacote esse obtido usando-se as expressões (3.2.1.7), (3.2.1.4d) e (3.2.2.3b), ou seja:

$$\Psi(x, \ t) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2 \ \pi}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \phi(k) \ e^{i \ [k \ x \ - \ \omega(k) \ t]} \ dk \ , \qquad (3.2.2.9a)$$

$$\Psi(x, \ t) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2 \ \pi \ \hbar}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \phi(p) \ e^{\frac{i}{\hbar} (p \ x \ - \ E \ t)} \ dp \ . \qquad (3.2.2.9b)$$

Antes de prosseguirmos, demonstremos que a expressão acima satisfaz a expressão (3.2.2.8). Desse modo, teremos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2 \ \pi \ \hbar}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} (- \ \frac{i \ E}{\hbar}) \ \phi(p) \ e^{\frac{i}{\hbar} \ (p \ x \ - \ E \ t)} \ dp \quad \rightarrow$$

$$i \ \hbar \ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2 \ \pi \ \hbar}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} E \ \phi(p) \ e^{\frac{i}{\hbar} \ (p \ x \ - \ E \ t)} \ dp \ , \qquad (3.2.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ \hbar}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} (-\ \frac{p^2}{\hbar^2})\ \phi(p)\ e^{\frac{i}{\hbar}\ (p\ x\ -\ E\ t)}\ dp \quad \rightarrow$$

$$\frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \ =$$

$$= \ -\ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ \hbar}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} (\frac{p^2}{2\ m})\ \phi(p)\ e^{\frac{i}{\hbar}\ (p\ x\ -\ E\ t)}\ dp\ . \qquad (3.2.2.11)$$

Somando-se as expressões (3.2.2.10-11) e usando-se a expressão (3.2.2.1a), virá:

$$i\ \hbar\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \ + \ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \ =$$

$$= \ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ \hbar}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} (E\ -\ \frac{p^2}{2\ m})\ \phi(p)\ e^{\frac{i}{\hbar}\ (p\ x\ -\ E\ t)}\ dp \ = \ 0\ ,$$

o que confirma a expressão (3.2.2.8).

c1) Propagador de Feynman da PL

Considerando-se a expressão (3.2.1.10b) e inserindo-se nela a expressão (3.2.2.3c), teremos:

$$K(x,\ x',\ t) \ =$$

$$= \ \frac{1}{2\ \pi} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} e^{i\ k\ (x\ -\ x')\ -\ i\ \frac{\hbar\ t}{2\ m}\ k^2}\ dk\ . \qquad (3.2.2.12)$$

Para realizarmos a integração indicada na expressão acima, usaremos a seguinte expressão:[8]

$$\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} e^{-\ a\ y^2\ +\ b\ y}\ dy \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{b^2/4\ a}\ . \qquad (3.2.2.13)$$

Tomando-se a expressão (3.2.2.12) e inserindo-se na mesma a expressão acima, resultará:

$$K(x,\ x',\ t) \ = \ \frac{1}{2\ \pi}\ \sqrt{\frac{\pi}{i\ \hbar\ t/2m}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ x')^2}{4\ i\ \hbar\ t/2m}} \quad \rightarrow$$

$$K(x,\ x',\ t)\ =\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ e^{[\frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\ (x\ -\ x')^2]}\ , \qquad (3.2.2.14)$$

expressão essa que representa o **propagador de Feynman da partícula livre**.

c2) Evolução do Pacote de Schrödinger da PL

O pacote de onda schrödingeriano (função de onda) da PL será obtida substituindo-se a expressão (3.2.2.14) na expressão (3.2.1.10a). Portanto, teremos:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ e^{[\frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\ (x\ -\ x')^2]}\ \times$$

$$\times\ \Psi(x',\ 0)\ dx'\ . \qquad (3.2.2.15)$$

Examinando-se as expressões (3.2.2.7,15) observa-se que a função de onda $\Psi(x,\ t)$, correspondente, respectivamente, aos pacotes de onda luminoso e schrödingeriano da partícula livre, depende da forma da função de onda no instante inicial $\Psi(x',\ 0)$. [Aliás, essa dependência vale para qualquer sistema físico, conforme se pode ver pela expressão (3.2.1.10a).] Considerando-se que o momento linear e a posição de uma partícula não podem ser definidos simultaneamente com precisão [vide expressão (3.1.0.6)], a escolha de $\Psi(x',\ 0)$ [ou de $\phi(k)$, conforme a expressão (3.2.2.9a)] é feita de modo que o produto indicado na expressão (3.1.0.6) seja mínimo e, portanto, do tipo **gaussiano**.[9]

Desse modo, representemos $\phi(k)$ por um **pacote gaussiano**, de largura a_o, e centrado em torno de k_o:

$$\phi(k)\ =\ (\frac{\pi}{2\ a_o^2})^{-\ 1/4}\ e^{-\ a_o^2\ (k\ -\ k_o)^2}\ , \qquad (3.2.2.16)$$

cujas características ondulatórias $(\lambda_o,\ \nu_o)$ são dadas por [vide expressões (3.2.1.3d,4c) e (3.2.2.3c)]:

$$\lambda_o\ =\ \frac{2\ \pi}{k_o}\ , \qquad \nu_o\ =\ \frac{\omega_o}{2\ \pi}\ , \qquad (3.2.2.17a\text{-}b)$$

$$\omega_o \ = \ \omega(k_o) \ = \ \frac{\hbar}{2\ m}\ k_o^2 \ . \qquad (3.2.2.17\text{c-d})$$

Agora, vejamos como evolui o pacote gaussiano $\phi(k)$ com o tempo. Para isso, usaremos a expressão (3.2.2.16) na expressão (3.2.2.9a). Contudo, como esse pacote é muito pequeno fora de um pequeno intervalo envolvendo k_o, é conveniente considerar a expansão de Taylor de $\omega(k)$ em torno desse ponto, ou seja:

$$\omega(k) \simeq \omega(k_o) \ + \ (k \ - \ k_o) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_o} +$$

$$+ \ \frac{1}{2}\ (k \ - \ k_o)^2 \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_o} . \qquad (3.2.2.18)$$

Considerando-se as expressões (3.2.2.2b,3c,17d):

$$\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_o} \ = \ \frac{\hbar\ k_o}{m} \ = \ v_o \ , \qquad (3.2.2.19\text{a-b})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_o} \ = \frac{\hbar}{2\ m} \ = \ \alpha \ , \qquad (3.2.2.19\text{c-d})$$

a expressão (3.2.2.18) será escrita na forma:

$$\omega(k) \simeq \omega_o \ + \ (k \ - \ k_o)\ v_o \ + \ (k \ - \ k_o)^2\ \alpha \ . \qquad (3.2.2.20)$$

Levando-se as expressões (3.2.2.16) e (3.2.2.20) na expressão (3.2.1.7), fazendo-se a substituição $k \ - \ k_o \ = \ k'$, e usando-se a expressão (3.2.2.13), resultará:

$$\Psi(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \left(\frac{\pi}{2\ a_o^2}\right)^{-\ 1/4} e^{-\ a_o^2\ (k\ -\ k_o)^2} \ \times$$

$$\times\ e^{i \left(\ k\ x\ -\ [\omega_o\ +\ (k\ -\ k_o)\ v_o\ +\ (k\ -\ k_o)^2\ \alpha]\ t \ \right)}\ dk =$$

$$= \ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \left(\frac{\pi}{2\ a_o^2}\right)^{-\ 1/4} \times$$

$$\times\ e^{-\ a_o^2\ k'^2\ +\ i\ k_o\ x\ +\ i\ k'\ x\ -\ i\ \omega_o\ t\ -\ i\ k'\ v_o\ t\ -\ i\ k'^2\ \alpha\ t}\ dk'\ =$$

$$=\ (\frac{\pi}{2\ a_o^2})^{-\ 1/4}\ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}}\ e^{i\ (k_o\ x\ -\ \omega_o\ t)}\ \times$$

$$\times\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ e^{-\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)\ k'^2\ +\ i\ (x\ -\ v_o\ t)\ k'}\ dk'\ \ \rightarrow$$

$$\Psi(x,\ t)\ =\ (\frac{\pi}{2\ a_o^2})^{-\ 1/4}\ e^{i\ (k_o\ x\ -\ \omega_o\ t)}\ \sqrt{\frac{1}{2\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}}\ \times$$

$$\times\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}}\ , \qquad (3.2.2.21)$$

expressão essa que representa o **pacote de onda gaussiano da PL** ou **amplitude de probabilidade da PL**.

De posse da expressão acima, calculemos a **densidade de probabilidade da PL**, ou seja: $\Psi^*\ \Psi\ =\ |\ \Psi\ |^2$. Assim, calculando-se o complexo conjugado (*) da expressão (3.2.2.21), teremos:

$$\Psi^*(x,\ t)\ =\ (\frac{\pi}{2\ a_o^2})^{-\ 1/4}\ e^{-\ i\ (k_o\ x\ -\ \omega_o\ t)}\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{1}{2\ (a_o^2\ -\ i\ \alpha\ t)}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4\ (a_o^2\ -\ i\ \alpha\ t)}}\ . \qquad (3.2.2.22)$$

Portanto, usando-se as expressões (3.2.2.21-22), obteremos:

$$|\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ =\ \Psi^*(x,\ t)\ \Psi(x,\ t)\ =$$

$$=\ (\frac{\pi}{2\ a_o^2})^{-\ 1/4}\ e^{-\ i\ (k_o\ x\ -\ \omega_o\ t)}\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{1}{2\ (a_o^2\ -\ i\ \alpha\ t)}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4\ (a_o^2\ -\ i\ \alpha\ t)}}\ \times$$

$$\times \ \Big(\frac{\pi}{2\ a_o^2}\Big)^{-\ 1/4}\ e^{i\ (k_o\ x\ -\ \omega_o\ t)}\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{1}{2\ (a_o^2\ -\ i\ \alpha\ t)}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}}\ =$$

$$=\ \Big(\frac{\pi}{2\ a_o^2}\Big)^{-\ 1/2}\ \frac{1}{2\ \sqrt{a_o^4\ +\ \alpha^2\ t^2}}\ \times$$

$$\times\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4}\ \left(\frac{1}{a_o^2\ -\ i\ \alpha\ t}\ +\ \frac{1}{a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t}\right)}\ =$$

$$=\ \frac{a_o}{\sqrt{2\ \pi}}\ \frac{1}{\sqrt{a_o^4\ +\ \alpha^2\ t^2}}\ \times$$

$$\times\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4}\ \left(\frac{2\ a_o^2}{a_o^4\ +\ \alpha^2\ t^2}\right)}\ =$$

$$=\ \frac{a_o}{\sqrt{2\ \pi}}\ \frac{1}{\sqrt{a_o^4\ +\ \alpha^2\ t^2}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{2\ \left(a_o^2\ +\ \frac{\alpha^2\ t^2}{a_o^2}\right)}}\ \rightarrow$$

$$|\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ =\ \frac{a_o}{\sqrt{2\ \pi}}\ \frac{1}{a_o^2\ \sqrt{1\ +\ \frac{\alpha^2\ t^2}{a_o^4}}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{2\ a_o^2\ \left(1\ +\ \frac{\alpha^2\ t^2}{a_o^4}\right)}}\ .$$

Substituindo-se a expressão (3.2.2.19d) na expressão acima e definindo-se:

$$\tau\ =\ \frac{2\ m\ a_o^2}{\hbar}\ ,\qquad a(t)\ =\ a_o\ \sqrt{1\ +\ \frac{t^2}{\tau^2}}\ ,\qquad (3.2.2.23\text{a-b})$$

resultará:

$$|\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{2\ a^2(t)}}\ .\qquad (3.2.2.24)$$

Note-se que a expressão (3.2.2.24) satisfaz a expressão (3.1.0.4). Com efeito, usando-se a integral indicada abaixo:[8]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}, \qquad (3.2.2.25)$$

na expressão (3.2.2.24), teremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - v_o t)^2}{2 a^2(t)}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} a(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - v_o t)^2}{2 a^2(t)}} d(x - v_o t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} a(t)} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2} a(t)}} \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 . \qquad (3.2.2.26)$$

c3) Dinâmica do Pacote de Schrödinger da PL

Para estudarmos a dinâmica do pacote de onda da PL, deveremos calcular os valores médios [vide expressão (3.1.0.7)] de algumas grandezas físicas.

c3.1) Posição: $\hat{x} = x$

Usando-se as expressões (3.1.0.7) e (3.2.2.24), teremos:

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t)\, x\, \Psi(x, t)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, |\Psi(x, t)|^2 dx \rightarrow$$

$$< x > = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - v_o t)^2}{2 a^2(t)}} x\, dx . \qquad (3.2.2.27)$$

Para realizarmos a integral indicada na expressão acima, faremos a mudança de variável ($x - v_o t = X$), usaremos a expressão (3.2.2.25) e o fato de que a integral de uma função ímpar, envolvendo a origem, é nula. Desse modo, teremos:

$$< x > = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;a(t)} \int_{-\,\infty}^{+\,\infty} e^{-\,\frac{X^2}{2\,a^2(t)}}\,(X\,+\,v_o\,t)\;d(X + v_o\,t)\;=$$

$$=\;\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;a(t)} \int_{-\,\infty}^{+\,\infty} e^{-\,\frac{X^2}{2\,a^2(t)}}\;X\;dX\;+$$

$$+\;\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;a(t)} \int_{-\,\infty}^{+\,\infty} e^{-\,\frac{X^2}{2\,a^2(t)}}\;(v_o\;t)\;dX\;\;=$$

$$=\;0\;+\;(v_o\;t)\;\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\;a(t)} \int_{-\,\infty}^{+\,\infty} e^{-\,\frac{X^2}{2\,a^2(t)}}\;dX\;\;=$$

$$=\;\frac{v_o\;t}{\sqrt{2\,\pi}\;a(t)}\;\frac{\sqrt{\pi}}{1/\sqrt{2}\;a(t)}\quad\rightarrow$$

$$< x > =\;v_o\,t\;. \qquad (3.2.2.28)$$

A expressão (3.2.2.28) nos mostra que o "pacote de-broglieano", associado a uma partícula livre e de largura inicial a_o, mantém o seu "centro de massa" deslocando-se com uma velocidade constante v_o.

c3.2) Momento Linear: $\hat{p_x}\;=\;-\,i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}$

Usando-se as expressões (3.1.0.7) e (3.2.2.2a,21-22,26) e de maneira análoga ao caso anterior, obteremos:

$$< \hat{p_x} > = \int_{-\,\infty}^{+\,\infty} \Psi^*(x,\;t)\;(-\,i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial x})\;\Psi\;(x,\;t)\;dx\;\;=$$

$$=\;\int_{-\,\infty}^{+\,\infty} (\frac{\pi}{2\;a_o^2})^{-\,1/4}\;e^{-\,i\;(k_o\;x\;-\;\omega_o\;t)}\;\times$$

$$\times\;\sqrt{\frac{1}{2\;(a_o^2\;-\;i\;\alpha\;t)}}\;e^{-\,\frac{(x\;-\;v_o\;t)^2}{4\;(a_o^2\;-\;i\;\alpha\;t)}}\quad\times$$

$$\times\quad(-\,i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial x})\;(\frac{\pi}{2\;a_o^2})^{-\,1/4}\;e^{i\;(k_o\;x\;-\;\omega_o\;t)}\;\times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{2\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}}\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{4\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}}\ dx\ =$$

$$=\ (-\ i\ \hbar)\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \left[\ i\ k_o\ -\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)}{2\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}\ \right]\ |\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ dx\ =$$

$$=\ (-\ i\ \hbar)\ \Big[\ (i\ k_o)\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ |\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ dx\ -$$

$$-\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)}{2\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}\ |\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ dx\ \Big]\ =$$

$$=\ \hbar\ k_o\ -\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ \frac{X}{2\ (a_o^2\ +\ i\ \alpha\ t)}\ |\ \Psi(X,\ t)\ |^2\ dX\quad \rightarrow$$

$$<\ \hat{p_x}\ >=\ p_o\ . \qquad (3.2.2.29)$$

A expressão (3.2.2.29) representa o mesmo resultado do item anterior, ou seja, que o “pacote debroglieano”, associado a uma partícula livre e de largura inicial a_o, mantém o seu “centro de massa” deslocando-se com uma velocidade (momento linear) constante v_o (p_o).

c3.3) Incerteza na Posição: Δx

Tomemos a definição de **incerteza**:[10]

$$\Delta x\ =\ \sqrt{[<\ x^2\ >\ -(<\ x\ >)^2\ ]}\ . \qquad (3.2.2.30)$$

Usando-se as expressões (3.1.0.7) e (3.2.2.24), teremos:

$$<\ x^2\ >=\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ x^2\ |\ \Psi(x,\ t)\ |^2\ dx\ =$$

$$=\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ x^2\ e^{-\ \frac{(x\ -\ v_o\ t)^2}{2\ a^2(t)}}\ dx\ . \qquad (3.2.2.31)$$

Para realizarmos a integral indicada na expressão acima, faremos a mudança de variável ($x - v_o t = X$), usaremos a expressão (3.2.2.24) e o fato de que a integral de uma função ímpar, envolvendo a origem, é nula. Então, teremos:

$$< x^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} (X + v_o t)^2 \mid \Psi(X, t) \mid^2 d(X + v_o t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \pi} a(t)} (X^2 + 2 X v_o t +$$

$$+ v_o^2 t^2) e^{- \frac{X^2}{2 a^2(t)}} dX = \frac{1}{\sqrt{2 \pi} a(t)} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 e^{- \frac{X^2}{2 a^2(t)}} dX +$$

$$+ 2 v_o t \int_{-\infty}^{+\infty} X e^{- \frac{X^2}{2 a^2(t)}} dX +$$

$$+ v_o^2 t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{- \frac{X^2}{2 a^2(t)}} dX \Big) \rightarrow$$

$$< x^2 > = \frac{1}{\sqrt{2 \pi} a(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 e^{- \beta X^2} dX + 0 +$$

$$+ v_o^2 t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \Psi(X, t) \mid^2 dX , \qquad (3.2.2.32a)$$

com:

$$\beta = \frac{1}{2 a^2(t)} . \qquad (3.2.2.32b)$$

Usando-se a expressão (3.2.2.26) e a integral indicada abaixo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{- \beta x^2} dx = - \frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{- \beta x^2} dx , \qquad (3.2.2.33)$$

a expressão (3.2.2.32a) ficará:

$$< x^2 > = \frac{1}{\sqrt{2 \pi} a(t)} (- \frac{d}{d\beta}) \sqrt{\pi} (\beta^{- 1/2}) + (v_o t)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\ \sqrt{2}\ a(t)}\ \beta^{-\ 3/2}\ +\ (v_o\ t)^2\ =$$

$$= \frac{1}{2\ \sqrt{2}\ a(t)}\ [2\ a^2(t)]^{3/2}\ +\ (v_o\ t)^2\ \ \rightarrow$$

$$<\ x^2\ >=\ a^2(t)\ +\ (v_o\ t)^2\ . \qquad (3.2.2.34)$$

Levando-se as expressões (3.2.2.28) e (3.2.2.34) na expressão (3.2.2.30), e usando-se a expressão (3.2.2.23b), resultará:

$$\Delta x\ =\ \sqrt{a^2(t)\ +\ (v_o\ t)^2\ -\ (v_o\ t)^2}\ =\ a(t)\ \ \rightarrow$$

$$\Delta x\ =\ a_o\ \sqrt{1\ +\ \frac{t^2}{\tau^2}}\ , \qquad (3.2.2.35)$$

expressão essa que mostra que o pacote da PL não se deforma.

c3.4) Incerteza no Momento Linear: Δp_x

Usando-se a definição de **incerteza** vista no item anterior, isto é:

$$\Delta p_x\ =\ \sqrt{[<\ p_x^2\ >\ -(<\ p_x\ >)^2\ ]}\ , \qquad (3.2.2.36)$$

e os procedimentos algébricos usados anteriormente, pode-se demonstrar que:[11]

$$\Delta p_x\ =\ \Delta p_o\ . \qquad (3.2.2.37)$$

As expressões (3.2.2.28-29,35,37) nos mostram que o centro do pacote de onda da partícula livre permanece em $x\ =\ 0$ enquanto sua largura aumenta com o tempo t, desde o passado até o futuro, isto é, o pacote de onda inicial dispersa sem, contudo, deformar-se.[12] A essa não deformação, associa-se o conceito de **coerência** do pacote, uma vez que,

conforme vimos no Capítulo 1 [vide expressão (1.2.1.7)], a **densidade de probabilidade** $| \Psi |^2$ representa a **densidade de massa** ρ desse mesmo pacote, cuja evolução, sem deformação, é traduzida pela expressão (1.2.1.10).

3.3. Evolução do Pacote de Onda Quântico Via Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

Neste item, veremos a evolução do pacote de Schrödinger por intermédio da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$). Antes, apresentaremos os principais resultados dessa Mecânica desenvolvidos no Capítulo 1.

3.3.1. Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

Considerando-se a **equação de Schrödinger** (em uma dimensão):

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,\ t)}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2\ \Psi(x,\ t)}{\partial x^2}\;+$$

$$+\,V(x,\ t)\ \Psi(x,\ t)\ . \qquad (3.3.1.1)$$

e a função de onda $\Psi(x,\ t)$ na forma polar ou **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (1.2.1.2)]:

$$\Psi(x,\ t) \;=\; \phi(x,\ t)\ e^{i\ S(x,\ t)}. \qquad (3.3.1.2)$$

Usando-se a expressão (3.3.1.2) na expressão (3.3.1.1), demonstramos no Capítulo 1 as seguintes expressões [vide expressões (1.2.1.10,12b,13)]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\;+\;\frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\;=\;0\ , \qquad (3.3.1.3)$$

$$\hbar\,\frac{\partial S}{\partial t}\;+\;(\tfrac{1}{2}\ m\ v_{qu}^2\;+\;V\;+\;V_{qu})\;=\;0\ , \qquad (3.3.1.4a)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t}\;+\;v_{qu}\,\frac{\partial v_{qu}}{\partial x}\;+\;\frac{1}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(V\;+\;V_{qu})\;=\;0\ , \qquad (3.3.1.4b)$$

onde [vide expressões (1.2.1.7,8,11a-b):

$$\rho(x,\ t)\;=\;|\ \Psi(x,\ t)\ |^2\;=\;\phi^2(x,\ t)\ , \qquad (3.3.1.5)$$

$$v_{qu}(x,\ t)\ =\ \frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S(x,\ t)}{\partial x}\ , \qquad (3.3.1.6)$$

$$\mathrm{V}_{qu}(x,\ t)\ =\ -\ (\frac{\hbar^2}{2\ m})\ \frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ =$$

$$=\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{1}{\sqrt{\rho}}\ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2}\ . \qquad (3.3.1.7a\text{-}b)$$

3.3.2. Pacote de Onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm

Consideremos a amplitude $\phi(x,\ t)$ do pacote de onda, dado pela expressão (3.3.1.2), da seguinte forma:[13]

$$\phi(x,\ t)\ =\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ , \qquad (3.3.2.1)$$

onde $X(t)$ representa o caminho clássico seguido pelo centro de massa do pacote.

Tomando-se a expressão (3.3.1.5) e inserindo-se nela a expressão (3.3.2.1), resultará:

$$\rho(x,\ t)\ =\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ . \qquad (3.3.2.2)$$

Derivando-se a expressão acima em relação ao tempo t, teremos (lembrar que x e t são variáveis independentes):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\ =\ -\ \frac{1}{2}\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 3/2}\ [4\ \pi\ a(t)\ \dot{a}(t)]\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ +$$

$$+\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ \frac{\partial}{\partial t}\ [-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}]\ =$$

$$=\ -\ \rho\ \Big(\ [2\ \pi\ a(t)\ \dot{a}(t)]\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1}\ +$$

$$+ \frac{4\ a^2(t)\ [x\ -\ X(t)]\ [-\ \dot{X}(t)]\ -\ [x\ -\ X(t)]^2\ 4\ a(t)\ \dot{a}(t)}{4\ a^4(t)} \Big) \quad \to$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; \rho \Big(\;-\; \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \;+\; \frac{\dot{X}(t)}{a^2(t)}\ [x \;-\; X(t)] \;+$$

$$+ \; \frac{\dot{a}(t)}{a^3(t)}\ [x \;-\; X(t)]^2 \Big) \;. \qquad (3.3.2.3)$$

Levando-se a expressão (3.3.2.3) na expressão (3.3.1.3) e integrando-se o resultado, virá (considerando-se a constante de integração nula):

$$\rho \Big(\;-\; \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \;+\; \frac{\dot{X}(t)}{a^2(t)}\ [x \;-\; X(t)] \;+\; \frac{\dot{a}(t)}{a^3(t)}\ [x \;-\; X(t)]^2 \Big) \;+$$

$$+ \; \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x} \;=\; 0 \quad \to \quad \int \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\ \partial x \;=$$

$$= \; \int \rho \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \;-\; \frac{\dot{X}(t)}{a^2(t)}\ [x \;-\; X(t)] \;-\; \frac{\dot{a}(t)}{a^3(t)}\ [x \;-\; X(t)]^2 \Big)\ \partial x \quad \to$$

$$\rho\ v_{qu} \;=\; \int \rho \Big[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \;-\; \frac{[x\ -\ X(t)]}{a^2(t)} \;\times$$

$$\times \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x \;-\; X(t)] \;+\; \dot{X}(t) \Big) \Big]\ \partial x \quad \to$$

$$v_{qu} \;=\; \rho^{-\ 1} \int \rho \Big[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \;-\; \frac{[x\ -\ X(t)]}{a^2(t)} \;\times$$

$$\times \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x \;-\; X(t)] \;+\; \dot{X}(t) \Big) \Big]\ \partial x \;. \qquad (3.3.2.4)$$

Usando-se a expressão (3.3.2.2), poderemos escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big[\rho \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x \;-\; X(t)] \;+\; \dot{X}(t) \Big) \Big] \;=$$

$$= \rho \, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) +$$

$$+ \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} \, =$$

$$= \rho \, \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, + \, \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) \times$$

$$\times \, \frac{\partial}{\partial x} \left([2 \, \pi \, a^2(t)]^{- \, 1/2} \, e^{- \, \frac{[x \, - \, X(t)]^2}{2 \, a^2(t)}} \right) \, =$$

$$= \rho \, \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, + \, \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) \times$$

$$\times \, [2 \, \pi \, a^2(t)]^{- \, 1/2} \, e^{- \, \frac{[x \, - \, X(t)]^2}{2 \, a^2(t)}} \, \frac{\partial}{\partial x} \left(- \, \frac{[x \, - \, X(t)]^2}{2 \, a^2(t)} \right) \, =$$

$$= \rho \, \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, + \, \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) \rho \left(- \, \frac{2 \, [x \, - \, X(t)]}{2 \, a^2(t)} \right) \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) \right] \, =$$

$$= \, \rho \Big[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{[x \, - \, X(t)]}{a^2(t)} \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] + \dot{X}(t) \Big) \Big] \, . \quad (3.3.2.5)$$

Considerando-se a expressão (3.3.2.4) e substituindo-se nela a expressão (3.3.2.5), obteremos:

$$v_{qu} \, = \, \rho^{- \, 1} \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \right) \right] \partial x \quad \rightarrow$$

$$v_{qu}(x, \, t) \, = \, \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \, [x \, - \, X(t)] \, + \, \dot{X}(t) \, . \qquad (3.3.2.6)$$

É oportuno observar que a integração da expressão acima permite determinar a **trajetória quântica** do sistema físico considerado. Desse modo, teremos [deveremos lembrar que $\int \frac{dz}{z} \, = \, \ell n \, z, \; \ell n \, (\frac{x}{y}) \, = \, \ell n \, x \, - \, \ell n \, y$]:

$$v_{qu}(x,\ t)\ =\ \frac{dx_{qu}(t)}{dt}\ =\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x\ -\ X(t)]\ +\ \dot{X}(t)\quad \rightarrow$$

$$\frac{d[x_{qu}(t)\ -\ X(t)]}{[x_{qu}(t)\ -\ X(t)]}\ =\ \frac{da(t)}{a(t)}\quad \rightarrow$$

$$\int_o^t \frac{d[x_{qu}(t')\ -\ X(t')]}{[x_{qu}(t')\ -\ X(t')]}\ =\ \int_o^t \frac{da(t')}{a(t')}\quad \rightarrow$$

$$\ell n\ \left(\ \frac{[x_{qu}(t)\ -\ X(t)]}{[x_{qu}(0)\ -\ X(0)]}\ \right)\ =\ \ell n\ \left(\ \frac{a(t)}{a(0)}\ \right)\quad \rightarrow$$

$$x_{qu}(t)\ =\ X(t)\ +\ \frac{a(t)}{a(0)}\ [x_{qu}(0)\ -\ X(0)]\ , \qquad (3.3.2.7)$$

que representa a **trajetória quântica** procurada.

Para obter a forma do **pacote de onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm** dada pela expressão (3.3.1.2), vamos expandir $S(x,\ t)$, $V(x,\ t)$ e $V_{qu}(x,\ t)$ em torno de $X(t)$ até a segunda ordem de Taylor.[13] Desse modo, teremos:

$$S(x,\ t)\ =\ S[X(t),\ t]\ +\ S'[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{S''[X(t),\ t]}{2}\ [x\ -\ X(t)]^2\ , \qquad (3.3.2.8)$$

$$V(x,\ t)\ =\ V[X(t),\ t]\ +\ V'[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{V''[X(t),\ t]}{2}\ [x\ -\ X(t)]^2\ , \qquad (3.3.2.9a)$$

$$V_{qu}(x,\ t)\ =\ V_{qu}[X(t),\ t]\ +\ V'_{qu}[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{V''_{qu}[X(t),\ t]}{2}\ [x\ -\ X(t)]^2\ . \qquad (3.3.2.9b)$$

Derivando-se a expressão (3.3.2.9a) em relação a variável x, multiplicando-se o resultado por $\frac{\hbar}{m}$, usando-se as expressões (3.3.1.6) e (3.3.2.6), e considerando-se a condição sobre a identidade de polinômios, teremos:

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S(x,\ t)}{\partial x} \ = \ \frac{\hbar}{m} \Big(\ S'[X(t),\ t] \ +$$

$$+ \ S''[X(t),\ t] \ [x \ - \ X(t)] \ \Big) \ = \ v_{qu}(x,\ t) =$$

$$= \ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \ [x \ - \ X(t)] \ + \ \dot{X}(t) \quad \rightarrow$$

$$S'[X(t),\ t] \ = \ \frac{m \ \dot{X}(t)}{\hbar} \ , \qquad (3.3.2.10a)$$

$$S''[X(t),\ t] \ = \ \frac{m \ \dot{a}(t)}{\hbar \ a(t)} \ . \qquad (3.3.2.10b)$$

Substituindo-se as expressões (3.3.2.10a-b) na expressão (3.3.2.9a), teremos :

$$S(x,\ t) \ = \ S_o(t) \ + \ \frac{m \ \dot{X}(t)}{\hbar} \ [x \ - \ X(t)] \ +$$

$$+ \ \frac{m \ \dot{a}(t)}{2 \ \hbar \ a(t)} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ , \qquad (3.3.2.11)$$

onde:

$$S_o(t) \equiv S[X(t),\ t] \ , \qquad (3.3.2.12)$$

é a **ação quântica**.

Derivando-se a expressão (3.3.2.11) em relação ao tempo t, obteremos (lembrar que $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$):

$$\frac{\partial S}{\partial t} \ = \ \dot{S}_o(t) \ + \ \frac{\partial}{\partial t} \Big(\ \frac{m \ \dot{X}(t)}{\hbar} \ [x \ - \ X(t)] \ \Big) \ +$$

$$+ \ \frac{\partial}{\partial t} \Big(\ \frac{m \ \dot{a}(t)}{2 \ \hbar \ a(t)} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ \Big) \ =$$

$$= \ \dot{S}_o(t) \ + \ \frac{m \ \ddot{X}(t)}{\hbar} \ [x \ - \ X(t)] \ - \ \frac{m \ \dot{X}(t)^2}{\hbar} \ +$$

$$+ \frac{m}{2\ \hbar}\ [\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\ -\ \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}]\ [x\ -\ X(t)]^2\ -$$

$$-\ \frac{m\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{\hbar\ a(t)}\ [x\ -\ X(t)]\ . \qquad (3.3.2.13)$$

Agora, vamos escrever V_{qu} em potências de $[x - X(t)]$. Inicialmente, usando-se a expressão (3.3.2.1), calculemos as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\ =\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \Big)\ =$$

$$=\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ -\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}\ \Big)\ =$$

$$=\ -\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \frac{[x\ -\ X(t)]}{2\ a^2(t)}\quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ =\ -\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ \frac{[x\ -\ X(t)]}{2\ a^2(t)}\ \Big)\ -$$

$$-\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \frac{[x\ -\ X(t)]}{2\ a^2(t)}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}\ \Big)\ \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ =\ -\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \frac{1}{2\ a^2(t)}\ +$$

$$+\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^4(t)}\quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ =\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^4(t)}\ -\ \frac{1}{2\ a^2(t)}\ . \qquad (3.3.2.14)$$

Substituindo-se a expressão (3.3.2.14) na expressão (3.3.1.7a), usando-se a expressão (3.3.2.9b), e considerando-se a identidade de polinômios, resultará:

$$V_{qu}(x,\ t)\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \Big(\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^4(t)}\ -\ \frac{1}{2\ a^2(t)}\ \Big)\ =$$

$$=\ V_{qu}[X(t),\ t]\ +\ V'_{qu}[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{V''_{qu}[X(t),\ t]}{2}\ [x\ -\ X(t)]^2\quad \rightarrow$$

$$V_{qu}[X(t),\ t]\ =\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ ,\qquad (3.3.2.15)$$

$$V'_{qu}[X(t),\ t]\ =\ 0\ ,\qquad (3.3.2.16)$$

$$V''_{qu}[X(t),\ t] = -\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^4(t)}\ .\qquad (3.3.2.17)$$

Considerando-se a expressão (3.3.1.4a) e inserindo-se nela as expressões (3.3.1.6) e (3.3.2.6,8-9,13,15-17), obteremos:

$$\hbar\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ [\frac{1}{2}\ m\ v_{qu}^2\ +\ V\ +\ V_{qu}]\ =$$

$$=\ \hbar\ \Big(\ \dot{S}_o(t)\ +\ \frac{m\ \ddot{X}(t)}{\hbar}\ [x\ -\ X(t)]\ -\ \frac{m\ \dot{X}^2(t)}{\hbar}\ +$$

$$+\ \frac{m}{2\ \hbar}\ [\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\ -\ \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}]\ [x\ -\ X(t)]^2\ -$$

$$-\ \frac{m\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{\hbar\ a(t)}\ [x - X(t)]\Big) + \frac{1}{2}\ m\ \Big(\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x - X(t)] + \dot{X}(t)\Big)^2 +$$

$$+\ V[X(t),\ t]\ +\ V'[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{V''[X(t),\ t]}{2}\ [x - X(t)]^2 + \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)} - \frac{\hbar^2}{8\ m\ a^4(t)}\ [x - X(t)]^2 = 0.$$

Considerando-se que $[x - X(t)]^o = 1$, podemos agrupar a expressão acima em potências de [x - X(t)]. Desse modo, teremos:

$$\Big(\hbar\ \dot{S}_o(t)\ -\ m\ \dot{X}^2(t)\ +\ \tfrac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t)\ +\ V[X(t),\ t]\ +$$

$$+\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ \Big)\ [x\ -\ X(t)]^o\ +\ \Big(\ m\ \ddot{X}(t)\ -\ \tfrac{m\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{a(t)}\ +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2\ m\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{a(t)}\ +\ V'[X(t),\ t]\ \Big)\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \Big(\ \tfrac{m}{2}\ [\tfrac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\ -\ \tfrac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}]\ +\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{m\ \dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\ +$$

$$+\ \tfrac{V''[X(t),\ x]}{2}\ -\ \tfrac{\hbar^2}{8\ m\ a^4(t)}\ \Big)\ [x\ -\ X(t)]^2\ =\ 0\ .$$

Sendo a expressão acima um polinômio identicamente nulo, então os coeficientes de suas potências serão todos nulos, ou seja:

$$\dot{S}_o(t)\ =\ \tfrac{1}{\hbar}\ \Big(\ \tfrac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t)\ -\ V[X(t),\ t]\ -$$

$$-\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ \Big)\ , \qquad (3.3.2.18)$$

$$\ddot{X}(t)\ +\ \tfrac{1}{m}\ V'[X(t),\ t]\ =\ 0\ , \qquad (3.3.2.19)$$

$$\ddot{a}(t)\ +\ \Big(\ \tfrac{1}{m}\ V''[X(t),\ t]\ \Big)\ a(t)\ =\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m^2\ a^3(t)}\ . \qquad (3.3.2.20)$$

Considerando-se as seguintes condições iniciais:

$$X(0)\ =\ x_o\ , \qquad \dot{X}(0)\ =\ v_o\ , \qquad (3.3.2.21\text{a-b})$$

$$a(0)\ =\ a_o\ , \qquad \dot{a}(0)\ =\ b_o\ , \qquad (3.3.2.21\text{c-d})$$

e [vide expressão (3.3.1.6)]:

$$S_o(0) \;=\; \frac{m\; v_o\; x_o}{\hbar}\;, \qquad (3.3.2.22)$$

a integração da expressão (3.3.2.18) ficará:

$$S_o(t) \;=\; \frac{1}{\hbar}\int_o^t dt'\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{X}^2(t') \;-\; V[X(t'),\;t'] \;-\; \frac{\hbar^2}{4\;m\;a^2(t')}\right) +$$

$$+\;\frac{m\;v_o\;x_o}{\hbar}\;. \qquad (3.3.2.23)$$

Levando-se as expressões (3.3.2.10a-b) e (3.3.2.23) na expressão (3.3.2.11), teremos:

$$S(x,\;t) \;=\; \frac{1}{\hbar}\int_o^t dt'\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{X}^2(t') - V[X(t'),\;t'] - \frac{\hbar^2}{4\;m\;a^2(t')}\right) +$$

$$+\;\frac{m\;v_o\;x_o}{\hbar} \;+\; \frac{m\;\dot{X}(t)}{\hbar}\;[x\;-\;X(t)] \;+$$

$$+\;\frac{m\;\dot{a}(t)}{2\;\hbar\;a(t)}\;[x\;-\;X(t)]^2\;. \qquad (3.3.2.24)$$

A expressão (3.3.2.24) obtida acima nos permite, por fim, obter o **pacote de onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm**. Com efeito, tomando-se a expressão (3.3.1.2) e levando-se nela as expressões (3.3.2.1,24), virá:

$$\Psi(x,\;t) \;=\; [2\,\pi\,a^2(t)]^{-\;1/4}\;e^{\left[\left(\frac{i\;m\;\dot{a}(t)}{2\;\hbar\;a(t)}\;-\;\frac{1}{4\;a^2(t)}\right)[x\;-\;X(t)]^2\right)} \times$$

$$\times\;e^{\left[\frac{i\;m\;\dot{X}(t)}{\hbar}\;[x\;-\;X(t)]\;+\;\frac{i\;m\;v_o\;x_o}{\hbar}\right]} \times$$

$$\times\;e^{\left[\frac{i}{\hbar}\int_o^t dt'\left(\frac{1}{2}\;m\;\dot{X}^2(t')\;-\;V[X(t')]\;-\;\frac{\hbar^2}{4\;m\;a^2(t')}\right)\right]}\;. \qquad (3.3.2.25)$$

É oportuno destacar que, por intermédio das expressões (3.2.1.10a) e (3.3.2.25), é possível obtermos o **propagador de Feynman** para a expressão (3.3.1.1), conforme veremos no Capítulo 4. Assim, desse modo, poderemos escrever que [vide expressão 4.2.2.13)]

$$K(x,\ x_o;\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ \sqrt{\frac{a_o}{a(t)}}\ \times$$

$$\times\ e^{\left[\ \left(\ \frac{i\ m\ \dot{a}(t)}{2\ \hbar\ a(t)}\ -\ \frac{1}{4\ a^2(t)}\ \right)\ [x\ -\ X(t)]^2\ +\ \frac{i\ m\ \dot{X}(t)}{\hbar}\ [x\ -\ X(t)]\ \right]}\ \times$$

$$\times\ e^{\left[\ \frac{i}{\hbar}\ \int_o^t\ dt'\ \left(\ \frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t')\ -\ V[X(t')]\ -\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t')}\ \right)\ \right]}\ .\qquad (3.3.2.26)$$

Agora, de posse da expressão (3.3.2.25) que representa o **pacote de onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm**, estudaremos sua evolução no caso da **partícula livre PL**, e compararemos com o estudo feito anteriormente no item 3.2.2.

3.3.3. Evolução do Pacote de Onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm da Partícula Livre

Para a PL, tem-se $V[X(t),\ t]\ =\ 0$. Então, as expressões (3.3.2.19) e (3.3.2.20) ficarão:

$$\ddot{X}(t)\ =\ 0\ ,\qquad \ddot{a}(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a^3(t)}\ .\qquad (3.3.3.1\text{-}2)$$

Considerando-se as condições iniciais dadas pelas expressões (3.3.2.21a-d), integremos as expressões acima. A integração da expressão (3.3.3.1) é imediata, ou seja:

$$X(t)\ =\ x_o\ +\ v_o\ t\ .\qquad (3.3.3.3)$$

Para integrarmos a expressão (3.3.3.2), usaremos a **teoria dos invariantes de Ermakov-Lewis** desenvolvida no Capítulo 2. Desse modo, teremos:

$$\ddot{a}(t)\ =\ \frac{\kappa^2}{a^3(t)}\ ,\qquad \kappa\ =\ \frac{\hbar}{2\ m}\ .\qquad (3.3.3.4\text{a-b})$$

Fazendo-se:[14]

$$a(t)\ =\ r(\theta)\ \alpha(t)\ ,\qquad \frac{d\theta}{dt}\ =\ \frac{1}{\alpha^2(t)}\ ,\qquad (3.3.3.5\text{a-b})$$

teremos:

$$\dot{a}(t) \;=\; r(\theta)\;\dot{\alpha}(t)\;+\;\alpha(t)\;\tfrac{d}{dt}\;r(\theta)\;=$$

$$=\;r\;\dot{\alpha}\;+\;\alpha\;\tfrac{dr}{d\theta}\;\tfrac{d\theta}{dt}\;=\;r\;\dot{\alpha}\;+\;\alpha\;r'\;\tfrac{1}{\alpha^2}\quad\longrightarrow$$

$$\dot{a}(t)\;=\;r(\theta)\;\dot{\alpha}(t)\;+\;\tfrac{r'(\theta)}{\alpha}\;,\qquad r'(\theta)\;=\;\tfrac{dr(\theta)}{d\theta}\;.\qquad (3.3.3.6a\text{-}b)$$

Derivando-se a expressão (3.3.3.6a) em relação ao tempo t e considerando-se que [vide expressões (3.3.3.5b,6b)]:

$$\tfrac{dr(\theta)}{dt}\;=\;\dot{r}\;=\;\tfrac{dr(\theta)}{d\theta}\;\tfrac{d\theta}{dt}\;=\;\tfrac{r'}{\alpha^2}\;,\qquad (3.3.3.7a)$$

$$\tfrac{dr'}{dt}\;=\;\tfrac{dr'}{d\theta}\;\tfrac{d\theta}{dt}\;=\;\tfrac{r''}{\alpha^2}\;.\qquad (3.3.3.7b)$$

resultará:

$$\ddot{a}\;=\;r\;\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}\;\dot{r}+\frac{\alpha\;\frac{dr'}{dt}\;-\;r'\;\dot{\alpha}}{\alpha^2}\;=\;r\;\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}\;\tfrac{r'}{\alpha^2}+\tfrac{r''}{\alpha^3}-\dot{\alpha}\;\tfrac{r'}{\alpha^2}\quad\longrightarrow$$

$$\ddot{a}(t)\;=\;r(\theta)\;\ddot{\alpha}(t)\;+\;\tfrac{r''(\theta)}{\alpha^3(t)}\;.\qquad (3.3.3.8)$$

Impondo-se a condição:

$$\ddot{\alpha}(t)=0\;,\qquad (3.3.3.9)$$

e usando-se as expressões (3.3.3.4a-b), (3.3.3.5a) e (3.3.3.8), virá:

$$\tfrac{\kappa^2}{a^3(t)}\;=\;\tfrac{\kappa^2}{r^3(\theta)\;\alpha^3(t)}\;=\;\tfrac{r''(\theta)}{\alpha^3(t)}\quad\longrightarrow\quad r''(\theta)\;=\;\tfrac{\kappa^2}{r^3(\theta)}\;.\qquad (3.3.3.10)$$

Multiplicando-se as expressões (3.3.3.4a) e (3.3.3.9), respectivamente, por $\alpha(t)$ e $a(t)$, e subtraindo-se os resultados, virá:

$$\alpha(t)\ \ddot{a}(t)\ -\ \ddot{\alpha}(t)\ a(t)\ =\ \kappa^2\ \tfrac{\alpha(t)}{a^3(t)}\quad \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dt}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ =\ \kappa^2\ \tfrac{\alpha(t)}{a^3(t)}\ .$$

Multiplicando-se ambos os membros da expressão acima por $[\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]$, obteremos:

$$[\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ \tfrac{d}{dt}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ =$$

$$=\ \kappa^2\ \tfrac{\alpha(t)}{a(t)}\ \tfrac{[\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]}{a^2(t)}\quad \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dt}\ \Big(\ \tfrac{1}{2}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ \Big)^2\ =$$

$$=\ -\ \kappa^2\ \tfrac{\alpha(t)}{a(t)}\ \tfrac{d}{dt}\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]\ =\ -\ \tfrac{\kappa^2}{2}\ \tfrac{d}{dt}\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\ \tfrac{d}{dt}\ \Big(\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]^2\ +\ \kappa^2\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ \Big)\ =\ 0\quad \rightarrow$$

$$I_1\ =\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]^2\ +\ \kappa^2\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ ,\qquad (3.3.3.11)$$

onde essa constante de integração I_1 representa o **primeiro invariante de Ermakov-Lewis**.

Tomando-se a expressão (3.3.3.11), multiplicando-se e dividindo-se o primeiro termo dela por $\alpha^4(t)$, e usando-se as expressões (3.3.3.5a-b,7a), teremos:

$$I_1\ =\ \tfrac{\alpha^4(t)}{\alpha^4(t)}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]^2\ +\ \kappa^2\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ =$$

$$=\ \Big(\alpha^2(t)\ \tfrac{[\alpha(t)\ \dot{a}(t) - \dot{\alpha}(t)\ a(t)]}{\alpha^2(t)}\Big)^2 + \kappa^2\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ =$$

$$=\ \Big(\ \alpha^2(t)\ \tfrac{d}{dt}\ [\tfrac{a(t)}{\alpha(t)}]\ \Big)^2\ +\ \kappa^2\ [\tfrac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ =$$

$$= \left[\alpha^2(t) \frac{dr(\theta)}{\alpha^2(t)\ d\theta} \right]^2 + \frac{\kappa^2}{r^2(\theta)} = \left[\frac{dr(\theta)}{d\theta} \right]^2 + \frac{\kappa^2}{r^2(\theta)} \rightarrow$$

$$I_1 = [r'(\theta)]^2 + \frac{\kappa^2}{r^2(\theta)} . \qquad (3.3.3.12)$$

Definindo-se:[14]

$$r^2(\theta) = \omega(\theta) , \qquad (3.3.3.13)$$

teremos:

$$\frac{d\omega(\theta)}{d\theta} = \omega'(\theta) = 2\ r(\theta) \frac{dr(\theta)}{d\theta} = 2\ r(\theta)\ r'(\theta) \rightarrow$$

$$r'(\theta) = \frac{\omega'(\theta)}{2\ \sqrt{\omega(\theta)}} . \qquad (3.3.3.14)$$

Substituindo-se a expressão (3.3.3.14) na expressão (3.3.3.12), e usando-se a expressão (3.3.3.13), resultará:

$$I_1 = \frac{\omega'^2(\theta)}{4\ \omega(\theta)} + \frac{\kappa^2}{\omega(\theta)} \rightarrow \frac{\omega'^2(\theta)}{4} + \kappa^2 = I_1\ \omega(\theta) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} = \sqrt{I_1\ \omega(\theta) - \kappa^2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega(\theta)}{\sqrt{I_1\ \omega(\theta) - \kappa^2}} = d\theta \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\ I_1} [I_1\ \omega(\theta) - \kappa^2]^{-\ 1/2}\ d[I_1\ \omega(\theta) - \kappa^2] = d\theta .$$

Integrando-se a expressão acima, virá:

$$\theta + I_2 = \frac{1}{I_1} \sqrt{I_1\ \omega(\theta) - \kappa^2} , \qquad (3.3.3.15)$$

onde a constante de integração I_2 representa o **segundo invariante de Ermakov-Lewis**.

Quadrando-se a expressão (3.3.3.15) e usando-se as expressões (3.3.3.5a,13), obteremos:

$$(\theta \ + \ I_2)^2 \ = \ \frac{I_1 \ \omega(\theta) \ - \ \kappa^2}{I_1^2} \ \ \rightarrow \ \ \omega(\theta) \ = \ \frac{I_1^2 \ (\theta \ + \ I_2)^2 \ + \ \kappa^2}{I_1} \ \ \rightarrow$$

$$r^2(\theta) \ = \ \frac{\kappa^2}{I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ + \ I_1 \ \theta^2 \ + \ 2 \ I_1 \ I_2 \ \theta \ \ \rightarrow$$

$$\frac{a^2(t)}{\alpha^2(t)} \ = \ \frac{\kappa^2}{I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ + \ I_1 \ \theta^2 \ + \ 2 \ I_1 \ I_2 \ \theta \ . \qquad (3.3.3.16)$$

Considerando-se que [vide expressão (3.3.3.5b)]:

$$\theta \ = \ \int^t \frac{dt'}{\alpha^2(t')} \ , \qquad (3.3.3.17)$$

e considerando-se, também, a expressão (3.3.3.4b), a expressão (3.3.3.16) ficará:

$$a^2(t) \ = \ \Big(\frac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \Big) \ \alpha_1^2(t) \ + \ I_1 \ \alpha_2^2(t) \ +$$

$$+ \ 2 \ I_1 \ I_2 \ \alpha_1(t) \ \alpha_2(t) \ , \qquad (3.3.3.18a)$$

onde:

$$\alpha_1(t) \equiv \alpha(t) \ , \qquad \alpha_2(t) \equiv \alpha(t) \ \int^t \frac{dt'}{\alpha^2(t')} \ . \qquad (3.3.3.18b\text{-}c)$$

Admitindo-se uma solução particular (constante) da equação representada pela expressão (3.3.3.9), ou seja:

$$\alpha_1(t) \ = \ 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_2(t) \ = \ t \ , \qquad (3.3.3.19a\text{-}b)$$

a expressão (3.3.3.18a) tomará o seguinte aspecto:

$$a^2(t) \ = \ a_o^2 \left(1 \ + \ \tfrac{2 \ I_1 \ I_2}{a_o^2} \ t \ + \ \tfrac{I_1}{a_o^2} \ t^2 \right) \ =$$

$$= \ a_o^2 \ (1 \ + \ B \ t \ + \ C \ t^2) \ = \ a_o^2 \ \eta(t) \ , \qquad (3.3.3.20a\text{-}c)$$

com:

$$a_o^2 \ = \ \tfrac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ , \qquad (3.3.3.20d)$$

$$B \ = \ \tfrac{2 \ I_1 \ I_2}{a_o^2} \ , \qquad C \ = \ \tfrac{I_1}{a_o^2} \ , \qquad (3.3.3.20e\text{-}f)$$

$$\eta(t) \ = \ 1 \ + \ B \ t \ + \ C \ t^2 \ , \ (3.3.3.20g)$$

onde a constante B está relacionada com as condições iniciais da largura do pacote $a(t)$. Com efeito, derivando-se a expressão (3.3.3.20b) e usando-se as expressões (3.3.2.21c-d), virá:

$$2 \, a(t) \, \dot{a}(t) \ = \ a_o^2 \, (B + 2 \, C \, t) \ \rightarrow \ \dot{a}(t) \ = \ \tfrac{a_o^2}{a(t)} \, (\tfrac{B}{2} + C \ t) \ \rightarrow$$

$$\dot{a}(0) \ = \ b_o = \ a_o \ \tfrac{B}{2} \quad \rightarrow$$

$$B \ = \ \tfrac{2 \ b_o}{a_o} \ = \ \tfrac{2 \ \dot{a}(0)}{a(0)} \ . \qquad (3.3.3.21a\text{-}b)$$

De posse das expressões (3.3.3.20a-g), poderemos obter o **propagador de Feynman da partícula livre**. Para isso, basta inserir as expressões referidas acima na expressão (3.3.2.26). Desse modo, conforme veremos no Capítulo 4, poderemos escrever que [vide expressões (4.3.1.2b,21)]:

$$K(x, \ x_o; \ t) \ = \ \sqrt{\tfrac{m}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ t}} \ exp \ [\tfrac{i \ m}{2 \ \hbar \ t} \ (x \ - \ x_o)^2] \ \times$$

$$\times \ [\eta(t)]^{1/4} \ \times \left[\ (1 \ + \ \tfrac{B \ t}{2})^2 \ + \ (\tfrac{\hbar \ t}{2 \ m \ a_o^2})^2 \ \right]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times\ exp \left[\tfrac{i}{2} \left(arctg\ [\tfrac{\hbar\ t/(2\ m\ a_o^2)}{1\ +\ B\ t/2}] \ - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\ \tfrac{\hbar}{m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\tfrac{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}\ t}{2\ +\ B\ t}) \right) \right] . \qquad (3.3.3.22)$$

Contudo, para que a expressão (3.3.3.22) apresente a forma da expressão (3.2.2.14), é necessário que seja satisfeita a seguinte **condição de acoplamento**:[15]

$$C\ =\ (\tfrac{B}{2})^2\ +\ (\tfrac{\hbar}{2\ m\ a_o^2})^2\ =\ (\tfrac{B}{2})^2\ +\ \tfrac{1}{\tau^2}\ , \qquad (3.3.3.23a\text{-}b)$$

onde fizemos uso da expressão (3.2.2.23a). Em termos dos **invariantes de Ermakov-Lewis** I_1 e I_2 [vide expressões (3.3.3.20e-f)], a expressão (3.3.3.23b) será escrita na forma:

$$\tfrac{I_1}{a_o^2}\ =\ \tfrac{I_1^2\ I_2^2}{a_o^4}\ +\ \tfrac{1}{\tau^2}\ \ \rightarrow\ \ \tfrac{I_1\ \tau^2\ -\ a_o^2}{a_o^2\ \tau^2}\ =\ \tfrac{I_1^2\ I_2^2}{a_o^4}\ \ \rightarrow$$

$$I_2\ =\ \tfrac{a_o}{I_1\ \tau}\ \sqrt{I_1\ \tau^2\ -\ a_o^2}\ . \qquad (3.3.3.24)$$

Determinemos, agora, a forma final de $a^2(t)$ dada pela expressão (3.3.3.20b). Considerando-se a expressão (3.3.3.23b) (observar que B e C são constantes), por condições de dimensionalidade, deveremos ter:

$$\tfrac{B}{2}\ =\ \tfrac{b_o}{a_o}\ =\ \tfrac{\zeta}{\tau}\ . \qquad (3.3.3.25a\text{-}b)$$

Portanto, usando-se as expressões (3.3.3.23b,25b), virá:

$$C = (\tfrac{\zeta}{\tau})^2\ +\ \tfrac{1}{\tau^2}\ \ \rightarrow\ \ C\ =\ \tfrac{1\ +\ \zeta^2}{\tau^2}\ . \qquad (3.3.3.26)$$

Portanto, levando-se as expressões (3.3.3.25b-26) na expressão (3.3.3.20b), resultará:

$$a^2_{acoplado}(t) \ = \ a^2_o \ [\ 1 + \ \frac{2 \ \zeta}{\tau} \ t \ + \ \frac{(1 \ + \ \zeta^2)}{\tau^2} \ t^2 \ ] \ . \qquad (3.3.3.27)$$

Comparando-se as expressões (3.2.2.23b) e (3.3.3.27), verifica-se que a primeira é um caso particular da segunda quando, nesta, se faz $\zeta \ = \ 0 \to b_o \ = \ 0$. No entanto, embora os propagadores de Feynman sejam os mesmos nas duas situações,[15] isso não ocorre com os pacotes de onda, conforme se pode ver na figura indicada abaixo.[15]

Examinando-se a figura acima, observa-se que o **pacote de onda da partícula livre de Schrödinger**, calculado pela Mecânica Quântica de Schrödinger, espraia mais lentamente do que quando ela é calculada pela Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm.

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. A **câmara de névoa** foi inventada pelo físico escocês Charles Thomson Rees Wilson (1869-1959; PNF, 1927), em 1911, e baseia-se no fato de que um vapor super-resfriado se condensa em gotículas de líquido em torno de qualquer íon (partícula carregada positivamente ou negativamente) presente em seu interior.

2. Quando $\hat{F}$ e $\hat{G}$ representam, respectivamente, o momento linear (p_x) e a posição (x) de uma partícula, a expressão (3.1.0.4) toma o seguinte aspecto:

$$< \ (\Delta p_x) \ > < \ (\Delta x) \ > \ \geq \frac{1}{2} \, \hbar \ . \qquad (3.1.0.6)$$

3. Dado um operador $\hat{F}$ o seu **valor médio** é calculado pela seguinte expressão:

$$< \ \hat{F} \ > = \ \int_{V\infty} \Psi^{*}(\vec{r}, \ t) \ \hat{F} \ \Psi(\vec{r}, \ t) \ d^{3}\vec{r} \ . \qquad (3.1.0.7)$$

4. Veja-se, por exemplo, um dos seguintes textos, nos quais, inclusive, podem ser encontradas as referências dos trabalhos referidos na Introdução:

. POWELL, J. L. and CRASEMAN, B. 1961. **Quantum Mechanics**. Addison Wesley Publishing Company, Incorporation.

. HARRIS, L. and LOEB, A. L. 1963. **Introduction to Wave Mechanics**, McGraw-Hill Book Company, Inc. and Kogakusha Comapny, Ltd.

. DAVYDOV, A. S. 1965. **Quantum Mechanics**. Pergamon Press.

. DICKE, R. H. and WITTKE, J. P. 1966. **Introduction to Quantum Mechanics**. Addison Wesley Publishing Company, Incorporation.

. NEWING, R. A. and CUNNINGHAM, J. 1967. **Quantum Mechanics**, Oliver and Boyd Ltd.

. SCHIFT, L. I. 1970. **Quantum Mechanics**. McGraw-Hill Book Company, Incorporation.

. MERZBACHER, E. 1976. **Quantum Mechanics**. John Wiley and Sons, Incorporation.

. MOURA, O. 1984. **Mecânica Quântica**. EDUFPA.

. SHANKAR, R. 1994. **Principles of Quantum Mechanics**, Plenum Press.

5. Veja-se um dos textos citados na Nota (4).

6. BUTKOV, E. 1973. **Mathematical Physics**, Addison-Wesley Publishing Company.

7. Veja-se um dos textos citados na Nota (4).

8. FEYNMAN, R. P. and HIBBS, A. R. 1965. **Quantum Mechanics and Path Integrals**, McGraw-Hill Book Company.

9. Veja-se um dos textos citados na Nota (4). É oportuno registrar que, em 1979 (*American Journal of Physics* **47**, 264), M. V. Berry e N. L. Balazs consideraram um pacote de incerteza mínimo do tipo **airyano**.

10. Veja-se um dos textos citados na Nota (4).

11. NEWING and CUNNINGHAM, op. cit.

12. Para o caso de pacotes de onda airyanos dispersivos e acelerados, veja-se: NASSAR, A. B., BASSALO, J. M. F. and ALENCAR, P. T. S. 1995. *American Journal of Physics* **63**, 849.

13. NASSAR, A. B., BASSALO, J. M. F., ALENCAR, P. T. S., CANCELA, L. S. G. and CATTANI, M. 1997. *Physical Review E 56*, 1230.

14. NASSAR, A. B. 1990. *Physics Letters A 146*, 89; —— 1999a. **Wave Function versus Propagator**. (DFUFPA, mimeo);

SOUZA, J. F. de 1999. **Aproximação de de Broglie-Bohm para Osciladores Harmônicos Dependentes do Tempo**. *Tese de Mestrado*, DFUFPA.

15. LOPES, J. L. M. 1999. **Acoplamento de Invariantes na Partícula Livre Via Formulação Quanto-Hidrodinâmica de de Broglie-Bohm**. *Tese de Mestrado*, DFUFPA.

CAPÍTULO 4

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

E OS PROPAGADORES DE FEYNMAN

4.1. Introdução

Em 1948,[1] o físico norte-americano Richard Philips Feynman (1918-1988; PNF, 1965) formulou um **princípio de mínima ação quântica**, com o seguinte enunciado:

A amplitude de transição entre os estados $\mid a\ >$ e $\mid b\ >$ de um sistema quanto-mecânico é a soma das contribuições elementares, uma para cada trajetória passando em $\mid a\ >$ no tempo t_a e em $\mid b\ >$ no tempo t_b. Cada uma dessas contribuições tem o mesmo módulo, mas a sua fase é a ação cássica $S_{c\ell}$ para cada caminho.

Esse princípio é traduzido pelo conhecido **propagador de Feynman**:

$$K(b,\ a)\ =\ \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}\ S_{c\ell}(b,\ a)}\ D\ x(t)\ , \qquad (4.1.0.1)$$

com:

$$S_{c\ell}(b,\ a)\ =\ \int_{t_a}^{t_b} L\ (x,\ \dot{x},\ t)\ dt\ , \qquad (4.1.0.2)$$

onde $L(x,\ \dot{x},\ t)$ é o **lagrangeano** e $D\ x(t)$ é a **medida de Feynman**. Esta indica que devemos realizar a integral sobre todos os caminhos conectando os estados $\mid a\ >$ e $\mid b\ >$.

Observe-se que a integral que define $K(b,\ a)$ é a chamada **integral de caminho** ("path integral") ou **integral de**

Feynman e que a **função de onda de Schrödinger** $\Psi(x,\ t)$ de qualquer sistema físico é determinada por intermédio da expressão:[2]

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} K(x,\ x_o,\ t,\ t_o)\ \Psi(x_o,\ t_o)\ dx_o\ , \qquad (4.1.0.3)$$

com a condição de **causalidade quântica**:

$$\lim_{t,\ t_o\ \rightarrow\ 0} K(x,\ x_o,\ t,\ t_o)\ =\ \delta(x\ -\ x_o)\ . \qquad (4.1.0.4)$$

4.2. **Propagador de Feynman-de Broglie-Bohm**

Neste item, deduziremos o **propagador de Feynman** por intermédio da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$) e da Teoria dos Invariantes de Ermakov-Lewis estudados, respectivamente, nos Capítulos 1 e 2.

4.2.1. Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

Consideremos a **equação de Schrödinger** (em uma dimensão):

$$i\ \hbar\ \frac{\partial \Psi(x,\ t)}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2\ \Psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ V(x,\ t)\ \Psi(x,\ t)\ . \qquad (4.2.1.1)$$

e a função de onda $\Psi(x,\ t)$ na forma polar ou **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (1.2.1.2)]:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \phi(x,\ t)\ e^{i\ S(x,\ t)}. \qquad (4.2.1.2)$$

Usando-se a expressão (4.2.1.2) na expressão (4.2.1.1), demonstramos no Capítulo 1 as seguintes expressões [vide expressões (1.2.1.10,12b,13)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\ +\ \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\ =\ 0\ , \qquad (4.2.1.3)$$

$$\hbar \ \frac{\partial S}{\partial t} \ + \ (\frac{1}{2} \ m \ v_{qu}^2 \ + \ V \ + \ V_{qu}) \ = \ 0 \ , \qquad (4.2.1.4a)$$

$$\frac{\partial v_{qu}}{\partial t} \ + \ v_{qu} \ \frac{\partial v_{qu}}{\partial x} \ + \ \frac{1}{m} \ \frac{\partial}{\partial x} \ (V \ + \ V_{qu}) \ = \ 0 \ , \qquad (4.2.1.4b)$$

onde [vide expressões (1.2.1.7,8,11a-b):

$$\rho(x, \ t) \ = \ \Psi^*(x, \ t) \ \Psi(x, \ t) \ =$$

$$= \ | \ \Psi(x, \ t) \ |^2 \ = \ \phi^2(x, \ t) \ , \qquad (4.2.1.5)$$

$$v_{qu}(x, \ t) \ = \ \frac{\hbar}{m} \ \frac{\partial S(x, \ t)}{\partial x} \ , \qquad (4.2.1.6)$$

$$\mathrm{V}_{qu}(x, \ t) \ = \ - \ (\frac{\hbar^2}{2 \ m}) \ \frac{1}{\phi} \ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \ =$$

$$= \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \ . \qquad (4.2.1.7a\text{-}b)$$

4.2.2. Cálculo do Propagador de Feynman-de Broglie-Bohm

No Capítulo 3, vimos que a função de onda $\Psi(x, \ t)$ dada pela expressão (4.1.0.3) recebeu o nome de **pacote de onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm**, e ela apresenta o seguinte aspecto [vide expressão (3.3.2.25)]:

$$\Psi(x, \ t) \ = \ [2 \ \pi \ a^2(t)]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \Big(\ \frac{i \ m \ \dot{a}(t)}{2 \ \hbar \ a(t)} \ - \ \frac{1}{4 \ a^2(t)} \ \Big) \ [x \ - \ X(t)]^2 \ \Big] \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i \ m \ \dot{X}(t)}{\hbar} \ [x \ - \ X(t)] \ + \ \frac{i \ m \ v_o \ x_o}{\hbar} \ \Big] \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{\hbar} \ \int_o^t dt' \ \Big(\ \frac{1}{2} \ m \ \dot{X}^2(t') \ - \ V[X(t')] \ -$$

$$- \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t')} \Big) \Big] \ , \qquad (4.2.2.1)$$

onde [vide expressões (3.3.2.19-20)]:

$$\ddot{X}(t)\ +\ \frac{1}{m}\ V'[X(t),\ t]\ =\ 0\ , \qquad (4.2.2.2)$$

$$\ddot{a}(t)\ +\ \Big(\ \frac{1}{m}\ V''[X(t),\ t]\ \Big)\ a(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a^3(t)}\ , \qquad (4.2.2.3)$$

com as seguintes condições iniciais satisfeitas [vide expressões (3.3.2.21a-d)]:

$$X(0)\ =\ x_o\ , \qquad \dot{X}(0)\ =\ v_o\ , \qquad (4.2.2.4a\text{-}b)$$

$$a(0)\ =\ a_o\ , \qquad \dot{a}(0)\ =\ b_o\ . \qquad (4.2.2.4c\text{-}d)$$

Lembrar que, nas expressões vistas acima, $X(t)$ representa o caminho clássico seguido pela partícula.

Portanto, de posse do **pacote de onda de de Broglie-Bohm**, representado pela expressão (4.2.2.1), o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm** será obtido por intermédio da expressão (4.1.0.3), na qual tomaremos, sem perda de generalidades, $t_o\ =\ 0$. Assim:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} K(x,\ x_o,\ t)\ \Psi(x_o,\ 0)\ dx_o\ . \qquad (4.2.2.5)$$

Inicialmente, vamos definir a quantidade normalizada:

$$\Phi(v_o,\ x,\ t)\ =\ (2\ \pi\ a_o^2)^{1/4}\ \Psi(v_o,\ x,\ t)\ , \qquad (4.2.2.6)$$

que satisfaz a seguinte **relação de completeza**:[3]

$$\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ \Phi^*(v_o,\ x,\ t)\ \Phi(v_o,\ x',\ t)\ =$$

$$= (\tfrac{2\ \pi\ \hbar}{m})\ \delta(x\ -\ x')\ . \qquad (4.2.2.7)$$

Considerando-se as expressões (4.2.1.5) e (4.2.2.6), teremos:

$$\Phi^*(v_o,\ x,\ t)\ \Psi(v_o,\ x,\ t)\ =$$

$$=\ (2\ \pi\ a_o^2)^{1/4}\ \Psi^*(v_o,\ x,\ t)\ \Psi(v_o,\ x,\ t) =$$

$$= (2\ \pi\ a_o^2)^{1/4}\ \rho(v_o,\ x,\ t)\ \ \rightarrow\ \ \rho(v_o,\ x,\ t)\ =$$

$$=\ (2\ \pi\ a_o^2)^{-\ 1/4}\ \Phi^*(v_o,\ x,\ t)\ \Psi(v_o,\ x,\ t)\ . \qquad (4.2.2.8)$$

Levando-se a expressão (4.2.2.8) na expressão (4.2.1.3), integrando-se o resultado e usando-se a expressão (4.2.2.6), virá [lembrar que $\Psi^*\ \Psi(\pm\ \infty)\ \ \rightarrow\ \ 0$]:

$$\tfrac{\partial(\Phi^*\ \Psi)}{\partial t}\ +\ \tfrac{\partial(\Phi^*\ \Psi\ v_{qu})}{\partial x}\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dx\ \Phi^*\ \Psi\ +\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} \tfrac{\partial(\Phi^*\ \Psi\ v_{qu})}{\partial x}\ dx\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dx\ \Phi^*\ \Psi\ +\ (\Phi^*\ \Psi\ v_{qu})|_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ =$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dx\ \Phi^*\ \Psi\ +\ (2\ \pi\ a_o^2)^{1/4}\ (\Psi^*\ \Psi\ v_{qu})|_{-\ \infty}^{+\ \infty}\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dx\ \Phi^*\ \Psi\ =\ 0\ . \qquad (4.2.2.9)$$

A expressão (4.2.2.9) indica que a integral indicada nessa expressão não depende do tempo t. Portanto:

$$\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dx'\ \Phi^*(v_o,\ x',\ t)\ \Psi(x',\ t)\ =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_o \; \Phi^*(v_o, \; x_o, \; 0) \; \Psi(x_o, \; 0) \; . \qquad (4.2.2.10)$$

Multiplicando-se a expressão (4.2.2.10) por $\Phi(v_o, \; x, \; t)$, integrando-se em relação a v_o, e usando-se a expressão (4.2.2.7), resultará [lembrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \; f(x') \; \delta(x' - \; x) \; = f(x)$]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; dx' \; \Phi(v_o, \; x, \; t) \; \Phi^*(v_o, \; x', \; t) \; \Psi(x', \; t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; dx_o \; \Phi(v_o, \; x, \; t) \; \Phi^*(v_o, \; x_o, \; 0) \; \Psi(x_o, \; 0) \quad \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \; (\tfrac{2 \; \pi \; \hbar}{m}) \; \delta(x' \; - \; x) \; \Psi(x', \; t) \; = \; (\tfrac{2 \; \pi \; \hbar}{m}) \; \Psi(x, \; t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; dx_o \; \Phi(v_o, \; x, \; t) \; \Phi^*(v_o, \; x_o, \; 0) \; \Psi(x_o, \; 0) \quad \rightarrow$$

$$\Psi(x, \; t) \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\; (\tfrac{m}{2 \; \pi \; \hbar}) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; \Phi(v_o, \; x, \; t) \; \times$$

$$\times \; \Phi^*(v_o, \; x_o, \; 0) \Big] \; \Psi(x_o, \; 0) \; dx_o \; . \qquad (4.2.2.11)$$

Comparando-se as expressões (4.2.2.5) e (4.2.2.11), teremos:

$$K(x, \; x_o, \; t) \; =$$

$$= \; \tfrac{m}{2 \; \pi \; \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; \Phi(v_o, \; x, \; t) \; \Phi^*(v_o, \; x_o, \; 0) \; . \qquad (4.2.2.12)$$

Levando-se as expressões (4.2.2.1) e (4.2.2.6) na expressão (4.2.2.12), teremos o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm** que estamos procurando, ou seja [lembrar que $\Phi^*(v_o, \; x_o, \; 0) \; = \; exp \; (\frac{i \; m \; v_o \; x_o}{\hbar})$]:

$$K(x, \; x_o, \; t) \; = \; \tfrac{m}{2 \; \pi \; \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; \sqrt{\tfrac{a_o}{a(t)}} \; \times$$

$$\times\ exp\left[\left(\frac{i\ m\ \dot{a}(t)}{2\ \hbar\ a(t)} - \frac{1}{4\ a^2(t)}\right)[x - X(t)]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{i\ m\ \dot{X}(t)}{\hbar}\ [x - X(t)]\right] \times exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_o^t dt' \left(\frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t') - \right.\right.$$

$$\left.\left. - V[X(t')] - \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t')}\right)\right]\ , \qquad (4.2.2.13)$$

onde $X(t)$ e $a(t)$ são soluções das equações diferenciais representadas pelas expressões (4.2.2.2-3).[4]

4.3. Algumas Aplicações do Propagador de Feynman-de Broglie-Bohm

4.3.1. Propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da Partícula Livre - PL

Para o caso da PL, $V[X(t),\ t] = 0$, e portanto, de acordo com as expressões (4.2.2.2-4a-b), teremos:

$$\ddot{X}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad X(t) = x_o + v_o\ t\ , \qquad (4.3.1.1a)$$

$$\dot{X}(t) = v_o\ , \qquad \ddot{a}(t) = \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a^3(t)}\ . \qquad (4.3.1.1b\text{-}c)$$

Conforme vimos no Capítulo 3, usando-se a **teoria dos invariantes de Ermakov-Lewis**, a solução da expressão (4.3.1.1c) é dada por [vide expressões (3.3.3.20a-g,21a-b) e (4.2.2.4c-d)]:

$$a^2(t) = a_o^2\ \eta(t)\ , \qquad (4.3.1.2a)$$

$$\eta(t) = 1 + B\ t + C\ t^2\ , \qquad (4.3.1.2b)$$

$$\dot{a}(t) = \frac{a_o^2}{a(t)}\ (\frac{B}{2} + C\ t)\ , \qquad (4.3.1.2c)$$

$$a_o^2 \ = \ \frac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ , \qquad (4.3.1.2d)$$

$$B \ = \ \frac{2 \ I_1 \ I_2}{a_o^2} \ = \ \frac{2 \ b_o}{a_o} \ = \ \frac{2 \ \dot{a}(0)}{a(0)}, \qquad (4.3.1.2e\text{-}g)$$

$$C \ = \ \frac{I_1}{a_o^2} \ = \ \frac{I_1}{a(0)^2} \ , \qquad (4.3.1.2h\text{-}i)$$

onde I_1 e I_2 são os **invariantes de Ermakov-Lewis**.

Considerando-se as expressões (4.3.1.2a,c), virá:

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \ = \ \frac{B/2 \ + \ C \ t}{\eta(t)} \ , \qquad (4.3.1.3a)$$

$$\sqrt{\frac{a_o}{a(t)}} \ = \ \sqrt{\frac{a_o}{a_o \ \sqrt{\eta(t)}}} \ = \ [\eta(t)]^{- \ 1/4} \ . \qquad (4.3.1.3b\text{-}c)$$

Por outro lado, tomando-se a expressão (4.3.1.1a), teremos:

$$x \ - \ X(t) \ = \ (x \ - \ x_o \ - \ v_o \ t) \ , \qquad (4.3.1.4a)$$

$$[x \ - \ X(t)]^2 \ = \ (x \ - \ x_o \ - \ v_o \ t)^2 \ =$$

$$= \ (x \ - \ x_o)^2 \ - \ 2 \ (x \ - \ x_o) \ v_o \ t \ + \ v_o^2 \ t^2 \ . \qquad (4.3.1.4b)$$

Desse modo, tomando-se a expressão (4.2.2.13) e inserindo-se nela as expressões (4.3.1.1b,2a,3a,c,4a-b), o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula livre** tomará a seguinte forma:

$$K(x, \ x_o, t) \ = \ \frac{m}{2 \ \pi \ \hbar} \int_{- \ \infty}^{+ \ \infty} dv_o \ [\eta(t)]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \left(\ \left[\ \frac{im}{2\hbar} \left[\frac{B/2 \ + \ Ct}{\eta(t)} \right] \ - \ \frac{1}{4a_o^2 \eta(t)} \ \right] \ \left[\ (x \ - \ x_o)^2 \ - \right. \right.$$

$$- 2(x - x_o)v_o t + v_o^2 t^2 \Big] \Big) \times exp \Big(\tfrac{i\ m\ v_o}{\hbar} \, [(x - x_o) - v_o\, t] \Big) \times$$

$$\times\ exp \Big(\tfrac{i}{\hbar} \int_o^t dt' \, [\tfrac{1}{2}\ m\ v_o^2 \ - \ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}] \Big) \ . \qquad (4.3.1.5)$$

Considerando-se que a integral indicada na expressão (4.3.1.5) é realizada no espaço dos v_o, vamos preparar o seu integrando envolvendo potências dessa variável de integração para que possamos utilizar a seguinte expressão:[5]

$$\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ e^{(-\ D\ v_o^2\ +\ E\ v_o)} \ = \ \sqrt{\tfrac{\pi}{D}}\ e^{\frac{E^2}{4\ D}} \ . \qquad (4.3.1.6)$$

Para determinarmos os valores de D e E da expressão (4.3.1.6), vamos trabalhar com as exponenciais indicadas na expressão (4.3.1.5). Desse modo, teremos:

$$K(x,\ x_o,\ t) \ = \ \tfrac{m}{2\ \pi\ \hbar} \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ [\eta(t)]^{-\ 1/4} \ \times$$

$$\times\ EXP1 \times EXP2 \times EXP3\ , \qquad (4.3.1.7)$$

com:

$$EXP1 \ = \ exp \Big(\, [\tfrac{i\ m}{2\ \hbar} \ (\tfrac{B/2\ +\ C\ t}{\eta(t)}) \ - \ \tfrac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}] \times$$

$$\times\ [\ (x\ -\ x_o)^2 \ - \ 2\ (x\ -\ x_o)\ v_o\ t \ + \ v_o^2\ t^2\ ] \Big) \ =$$

$$= \ exp \Big(\, [\tfrac{i\ m\ B}{4\ \hbar\ \eta(t)} \ + \ \tfrac{i\ m\ C\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)} \ - \ \tfrac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}] \times$$

$$\times\ [(x\ -\ x_o)^2 \ - \ 2\ (x\ -\ x_o)\ v_o\ t \ + \ v_o^2\ t^2] \Big) \ \rightarrow$$

$$EXP1 \ = \ exp \Big(\, [\tfrac{i\ m\ B}{4\ \hbar\ \eta(t)} + \tfrac{i\ m\ C\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)} - \tfrac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}] \, (x - x_o)^2 \Big) \, v_o^0 \times$$

$$\times \; exp \left(\; - \; [\frac{i \; m \; B}{4 \; \hbar \; \eta(t)} \; + \; \frac{i \; m \; C \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; - \; \frac{1}{4 \; a_o^2 \; \eta(t)}] \; 2 \; (x \; - \; x_o) \; t \; \right) \; v_o^1 \; \times$$

$$\times \; exp \left(\; [\frac{i \; m \; B}{4 \; \hbar \; \eta(t)} \; + \; \frac{i \; m \; C \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; - \; \frac{1}{4 \; a_o^2 \; \eta(t)}] \; t^2 \; \right) \; v_o^2 \; , \qquad (4.3.1.8)$$

$$EXP2 \; = \; exp \left(\; \frac{i \; m \; v_o^1}{\hbar} \; [(x \; - \; x_o) \; - \; v_o^1 \; t] \; \right) \; \rightarrow$$

$$EXP2 \; = \; exp \left(\; \frac{i \; m}{\hbar} \; [x \; - \; x_o] \; \right) \; v_o^1 \; \times$$

$$\times \; exp \left(\; - \; \frac{i \; m \; t}{\hbar} \; \right) \; v_o^2 \; , \qquad (4.3.1.9)$$

$$EXP3 \; = \; exp \left(\; \frac{i}{\hbar} \; \int_o^t \; dt' \; [\frac{1}{2} \; m \; v_o^2 \; - \; \frac{\hbar^2}{4 \; m \; a_o^2 \; \eta(t')}] \; \right) \; =$$

$$= \; exp \left(\; \frac{i \; m \; t}{2 \; \hbar} \; \right) \; v_o^2 \; \times \; exp \left(\; - \; \frac{i \; \hbar}{4 \; m \; a_o^2} \; \int_o^t \; \frac{dt'}{\eta(t')} \; \right) \; . \qquad (4.3.1.10)$$

Usando-se a expressão (4.3.1.2b), a integral indicada acima será escrita na forma:

$$\int_o^t \; \frac{dt'}{\eta(t')} \; = \; \int_o^t \; \frac{dt'}{(1 \; + \; B \; t' \; + \; C \; t'^2)} \; . \qquad (4.3.1.11)$$

Considerando-se que:[5]

$$\int \; \frac{du}{1 \; + \; B \; u \; + \; C \; u^2} \; =$$

$$= \; \frac{2}{\sqrt{4 \; C \; - \; B^2}} \; artg \; (\frac{2 \; C \; u \; + \; B}{\sqrt{4 \; C \; - \; B^2}}) \; , \qquad (4.3.1.12a)$$

$$(\sqrt{4 \; C \; - \; B^2} \; > \; 0) \qquad (4.3.1.12b)$$

$$arctg \; \alpha \; - \; artg \; \beta \; = \; arctg \; (\frac{\alpha \; - \; \beta}{1 \; + \; \alpha \; \beta}) \; , \qquad (4.3.1.12c)$$

a expressão (4.3.1.11) ficará:

$$\int_o^t \frac{dt'}{(1 + B\ t' + C\ t'^2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4\ C - B^2}} \left[artg\ (\frac{2\ C\ t + B}{\sqrt{4\ C - B^2}}) - artg\ (\frac{B}{\sqrt{4\ C - B^2}}) \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4\ C - B^2}}\ arctg \left(\frac{2\ C\ t/\sqrt{4\ C - B^2}}{1 + (2\ B\ C\ t + B^2)/(4\ C - B^2)} \right) \rightarrow$$

$$\int_o^t \frac{dt'}{(1 + B\ t' + C\ t'^2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4\ C - B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C - B^2}}{2 + B\ t})\ . \qquad (4.3.1.13)$$

Considerando-se a expressão (4.3.1.10) e levando-se nela a expressão (4.3.1.13), obteremos:

$$EXP3 = exp \left(- \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2} \frac{1}{\sqrt{4\ C - B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C - B^2}}{2 + B\ t}) \right) v_o^0 \times$$

$$\times\ exp \left(\frac{i\ m\ t}{2\ \hbar} \right) v_o^2\ . \qquad (4.3.1.14)$$

A fim de que possamos usar a expressão (4.3.1.6), vamos agrupar as potências de v_o nos argumentos das $EXP1-3$ [vide expressões (4.3.1.2b,8-9,14). Desse modo, teremos:[6]

$$v_o^0 \left([\frac{i\ m\ B}{4\ \hbar\ \eta(t)} + \frac{i\ m\ C\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)} - \frac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}]\ (x - x_o)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C - B^2}}\ arctg\ [\frac{t\ \sqrt{4\ C - B^2}}{2 + B\ t}] \right) \rightarrow$$

$$v_o^0 \left(\frac{i\ m\ (x - x_o)^2}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)} (\frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2} + \frac{B\ t}{2} + C\ t^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4C - B^2}}\ arctg\ [\frac{t\ \sqrt{4\ C - B^2}}{2 + Bt}] \right)\ , \ (4.3.1.15)$$

$$v_o^1 \Big(\; - \; [\tfrac{i \; m \; B}{4 \; \hbar \; \eta(t)} \; + \; \tfrac{i \; m \; C \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; - \; \tfrac{1}{4 \; a_o^2 \; \eta(t)}] \; \times$$

$$\times \; 2 \; (x \; - \; x_o) \; t \; + \; \tfrac{i \; m}{\hbar} \; (x \; - \; x_o) \Big) \; =$$

$$= \; v_o^1 \Big(\tfrac{i \; m}{\hbar \; \eta(t)} \; [- \; \tfrac{B \; t}{2} \; - \; C \; t^2 \; - \; \tfrac{i \; \hbar \; t}{2 \; m \; a_o^2} \; + \; \eta(t)] \; (x \; - \; x_o) \Big) =$$

$$= \; v_o^1 \Big(\tfrac{i \; m}{\hbar \; \eta(t)} \; [- \; \tfrac{B \; t}{2} \; - \; C \; t^2 \; - \; \tfrac{i \; \hbar \; t}{2 \; m \; a_o^2} \; +$$

$$+ \; 1 \; + \; B \; t \; + \; C \; t^2] \; (x \; - \; x_o) \Big) \; \rightarrow$$

$$v_o^1 \Big(\tfrac{i \; m}{\hbar \; \eta(t)} \; (x \; - \; x_o) \; F(t) \Big) \; , \qquad (4.3.1.16a)$$

$$F(t) \; = \; (1 \; + \; \tfrac{B \; t}{2} \; - \; \tfrac{i \; \hbar \; t}{2 \; m \; a_o^2}) \; , \qquad (4.3.1.16b)$$

$$v_o^2 \Big([\tfrac{i \; m \; B}{4 \; \hbar \; \eta(t)} \; + \; \tfrac{i \; m \; C \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; - \; \tfrac{1}{4 \; a_o^2 \; \eta(t)}] \; t^2 \; - \; \tfrac{i \; m \; t}{\hbar} \; + \; \tfrac{i \; m \; t}{2 \; \hbar} \Big) =$$

$$= v_o^2 \Big(\tfrac{i \; m \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; [\tfrac{B \; t}{2} \; + \; C \; t^2 \; + \; \tfrac{i \; \hbar \; t}{2 \; m \; a_o^2} \; - \; \eta(t)] \Big) =$$

$$= v_o^2 \Big(\tfrac{i \; m \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; [\tfrac{B \; t}{2} \; + \; C \; t^2 \; + \; \tfrac{i \; \hbar \; t}{2 \; m \; a_o^2} \; -$$

$$- \; 1 \; - \; B \; t \; - \; C \; t^2] \Big) \; \rightarrow$$

$$- \; v_o^2 \Big(\tfrac{i \; m \; t}{2 \; \hbar \; \eta(t)} \; F(t) \Big) \; . \qquad (4.3.1.17)$$

Levando-se as expressões (4.3.1.15,16a-b,17) na expressão (4.3.1.7), e usando-se as expressões (4.3.1.2b,6,16b), virá:

$$K(x, \; x_o, \; t) \; = \; \tfrac{m}{2 \; \pi \; \hbar} \; [\eta(t)]^{- \; 1/4} \; \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i\ m\ (x\ -\ x_o)^2}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)}(\frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ +\ \frac{B\ t}{2}\ +\ C\ t^2)\ -$$

$$-\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ Bt})\ \Big]\ \times$$

$$\times\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ e^{-\ v_o^2\ \frac{i\ m\ t\ F(t)}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ +\ v_o\ \frac{i\ m\ (x\ -\ x_o)\ F(t)}{\hbar\ \eta(t)}}\ \ \rightarrow$$

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i\ m\ (x\ -\ x_o)^2}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)}(\frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ +\ \frac{B\ t}{2}\ +\ C\ t^2)\ -$$

$$-\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ Bt})\ \Big]\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{\pi}{i\ m\ t\ F(t)/[2\ \hbar\ \eta(t)]}}\ exp\ \Big[\ \frac{i\ m}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)}\ (x\ -\ x_o)^2\ F(t)\ \Big]\ =$$

$$=\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \times\ [\eta(t)]^{1/4}\ \times\ \sqrt{\frac{1}{F(t)}}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ Bt})\ \Big]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \frac{i\ m\ (x\ -\ x_o)^2}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)}\ [F(t)\ +\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ +\ \frac{B\ t}{2}\ +\ C\ t^2]\ \Big)\ =$$

$$=\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \times\ [\eta(t)]^{1/4}\ \times\ \sqrt{\frac{1}{1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}}}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ Bt})\ \Big]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i\ m\ (x\ -\ x_o)^2}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)}\ (1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ +\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ +\ \frac{B\ t}{2}\ +$$

$$+\ C\ t^2)\ \Big]\ =\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \times\ [\eta(t)]^{1/4}\ \times\ \sqrt{\frac{1}{1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}}}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ Bt})\ \Big]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i\ m\ (x\ -\ x_o)^2}{2\ \hbar\ t\ \eta(t)}\ \eta(t)\ \Big]\ \ \rightarrow$$

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \times\ exp\ [\ \frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\ (x\ -\ x_o)^2\ ]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\ \Big]\ \times$$

$$\times\ [\eta(t)]^{1/4}\ \times\ \sqrt{\frac{1}{1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}}}\ . \qquad (4.3.1.18)$$

Considerando-se que:

$$a\ -\ i\ b\ =\ (a^2\ +\ b^2)^{1/2}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ -\ i\ [arctg\ (\frac{b}{a})]\ \Big)\ , \qquad (4.3.1.19)$$

teremos:

$$(1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})^{-\ 1/2}\ =\ [(1\ +\ \frac{B\ t}{2})^2\ +\ (\frac{\hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})^2]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \frac{i}{2}\ arctg\ [\frac{\hbar\ t/(2\ m\ a_o^2)}{1\ +\ B\ t/2}]\ \Big)\ . \qquad (4.3.1.20)$$

Levando-se a expressão (4.3.1.20) na expressão (4.3.1.19) e usando-se a expressão (4.3.1.2b), resultará:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \times\ exp\ [\frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\ (x\ -\ x_o)^2]\ \times$$

$$\times\ (1\ +\ B\ t\ +\ C\ t^2)^{1/4}\ \times\ [(1\ +\ \frac{B\ t}{2})^2\ +\ (\frac{\hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})^2]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i}{2}\ \Big(\ arctg\ [\frac{\hbar\ t/(2\ m\ a_o^2)}{1\ +\ B\ t/2}]\ -$$

$$- \frac{\hbar}{m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ [\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t}]\ \Big)\ \Big]\ . \qquad (4.3.1.21)$$

Para obtermos o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula livre**, vamos impor que:

$$(1\ +\ B\ t\ +\ C\ t^2)^{1/4}\ \times\ [(1\ +\ \frac{B\ t}{2})^2\ +$$

$$+\ (\frac{\hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})^2]^{-\ 1/4}\ =\ 1\quad \rightarrow \qquad (4.3.1.22)$$

$$1\ +\ B\ t\ +\ C\ t^2\ =\ (1\ +\ \frac{B\ t}{2})^2\ +\ (\frac{\hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})^2\ =$$

$$=\ 1\ +\ B\ t\ +\ [(\frac{B}{2})^2\ +\ (\frac{\hbar}{2\ m\ a_o^2})^2]\ t^2\quad \rightarrow$$

$$C\ =\ (\frac{B}{2})^2\ +\ (\frac{\hbar}{2\ m\ a_o^2})^2\ . \qquad (4.3.1.23)$$

Usando-se a expressão (4.3.1.23), teremos:

$$\sqrt{4\ C\ -\ B^2}\ =\ \sqrt{4\ (\frac{B^2}{4}\ +\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a_o^4})\ -\ B^2}\ =$$

$$=\ \frac{\hbar}{m\ a_o^2}\quad \rightarrow \quad arctg\ [\frac{\hbar\ t/(2\ m\ a_o^2)}{1\ +\ B\ t/2}]\ -$$

$$-\ \frac{\hbar}{m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ [\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t}]\ =\ 0\ . \qquad (4.3.1.24)$$

Por fim, levando-se as expressões (4.3.1.22,24) na expressão (4.3.1.21), obteremos o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula livre**:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ \hbar\ t}}\ \times$$

$$\times\ exp\ [\frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\ (x\ -\ x_o)^2]\ , \qquad (4.3.1.25)$$

que coincide com o **propagador de Feynman da partícula livre** obtido no Capítulo 3 [vide a expressão (3.2.2.14)].

É oportuno destacar que esse mesmo resultado é obtido quando se considera [vide expressão (4.2.2.4d)]:

$$\dot{a}(0) \;=\; b_o \;=\; 0 \;, \qquad (4.3.1.26)$$

pois, usando-se esse resultado na expressão (4.3.1.2f), virá (lembrar que $a_o \neq 0$):

$$\dot{a}(0) \;=\; b_o \;=\; 0 \;=\; a_o \; B/2 \quad \rightarrow \quad B \;=\; 0. \qquad (4.3.1.27a)$$

Levando-se esse resultado na expressão (4.3.1.23), teremos:

$$C \;=\; (\tfrac{\hbar}{2\; m\; a_o^2})^2 \qquad (4.3.1.27b)$$

e, com isso, as expressões (4.3.1.23,25) são preservadas.

Contudo, apesar de o **propagador de Feynman** ser o mesmo para as duas situações [$\dot{a}(0) \neq 0$ e $\dot{a}(0) \;=\; 0$], os pacotes de onda correspondentes são diferentes, conforme vimos no Capítulo 3 [vide expressões (3.2.2.23b) e (3.3.3.27)].

4.3.2. Propagador de Feynman-de Broglie-Bohm do Oscilador Harmônico Simples

Neste item, vamos calcular o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm do oscilador harmônico simples** caracterizado pelo seguinte potencial:

$$V(t) \;=\; \tfrac{1}{2}\; m\; \omega^2\; X(t)^2 \;. \qquad (4.3.2.1)$$

Considerando-se as expressões (4.2.2.2-3) e inserindo-se nelas a expressão acima, virá:

$$\ddot{X}(t) \;+\; \omega^2\; X(t) \;=\; 0 \;, \qquad (4.3.2.2)$$

$$\ddot{a}(t) \ + \ \omega^2 \ a(t) \ = \ \frac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ a^3(t)} \ . \qquad (4.3.2.3)$$

Para resolvermos as equações diferenciais indicadas acima, consideremos as seguintes condições iniciais [vide expressões (4.2.2.4a-d)]:

$$X(0) \ = \ x_o \ , \qquad \dot{X}(0) \ = \ v_o \ , \qquad (4.3.2.4a\text{-}b)$$

$$a(0) \ = \ a_o \ , \qquad \dot{a}(0) \ = \ b_o \ . \qquad (4.3.2.4c\text{-}d)$$

A solução da expressão (4.3.2.2) é a conhecida lei de movimento do oscilador harmônico simples, ou seja:[7]

$$X(t) \ = \ x_o \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \frac{v_o}{\omega} \ sen \ (\omega \ t) \ . \qquad (4.3.2.5)$$

Por sua vez, a solução da expressão (4.3.2.3) será obtida usando-se a **teoria dos invariantes de Ermakov-Lewis**, seguindo-se o que realizamos no item anterior. Assim, tomando-se as expressões (4.3.2.2-3), teremos:[8]

$$\ddot{X}(t) \ + \ \omega^2 \ X(t) \ = \ 0 \ \ \rightarrow \ \ \omega^2 \ = \ - \ \frac{\ddot{X}(t)}{X(t)} \ , \qquad (4.3.2.6)$$

$$\ddot{a}(t) \ - \ \frac{\ddot{X}(t)}{X(t)} \ a(t) \ = \ \frac{k^2}{a^3(t)} \ , \qquad k \ = \ \frac{\hbar}{2 \ m} \ . \qquad (4.3.2.7a\text{-}b)$$

Multiplicando-se os dois membros da expressão (4.3.2.7a) por $X(t)$, resultará:

$$X(t) \ \ddot{a}(t) \ - \ \ddot{X}(t) \ a(t) \ = \ \frac{k^2 \ X(t)}{a^3(t)} \ \ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \ [X(t) \ \dot{a}(t) \ - \ \dot{X}(t) \ a(t)] \ = \ \frac{k^2 \ X(t)}{a^3(t)} \ .$$

Multiplicando-se ambos os membros da expressão acima por $[\dot{X}(t) \ a(t) \ - \ X(t) \ \dot{a}(t)]$, teremos:

$$[\dot{X}(t)\ a(t)\ -\ X(t)\ \dot{a}(t)]\ \frac{d}{dt}\ [X(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{X}(t)\ a(t)]\ =$$

$$=\ k^2\ \frac{X(t)}{a(t)}\ \frac{[\dot{X}(t)\ a(t)\ -\ X(t)\ \dot{a}(t)]}{a^2(t)}\quad\rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ \Big(\ \frac{1}{2}\ [X(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{X}(t)\ a(t)]^2\ \Big)\ =\ -\ k^2\ \frac{d}{dt}\ \Big(\ \frac{1}{2}\ [\frac{X(t)}{a(t)}]^2\ \Big)\quad\rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ \Big(\ [\dot{a}(t)\ X(t)\ -\ a(t)\ \dot{X}(t)]^2\ +\ k^2\ [\frac{X(t)}{a(t)}]^2\ \Big)\ =\ 0\quad\rightarrow$$

$$\frac{dI_1}{dt}\ =\ 0\ ,\qquad (4.3.2.8a)$$

onde:

$$I_1\ =\ [\dot{a}(t)\ X(t)\ -\ a(t)\ \dot{X}(t)]^2\ +\ k^2\ [\frac{X(t)}{a(t)}]^2\ ,\qquad (4.3.2.8b)$$

é o **primeiro invariante de Ermakov-Lewis**.

Considerando-se que:

$$\frac{d}{dt}\ [\frac{a(t)}{X(t)}]\ =\ \frac{\dot{a}(t)\ X(t)\ -\ a(t)\ \dot{X}(t)}{X^2(t)}\ ,$$

e fazendo-se [vide expressões (3.3.3.5a-b)]:

$$a(t)\ =\ r(\theta)\ X(t)\ ,\qquad \frac{d\theta}{dt}\ =\ \frac{1}{X^2(t)}\ ,\qquad (4.3.2.9a\text{-}b)$$

$$\theta(t)\ =\ \int^t\ \frac{dt'}{X^2(t')}\ ,\qquad (4.3.2.9c)$$

a expressão (4.3.2.8) ficará:

$$I_1\ =\ \Big(\ [X^2(t)\ \frac{d}{dt}\ [\frac{a(t)}{X(t)}]\ \Big)^2\ +\ k^2\ [\frac{X(t)}{a(t)}]^2\quad\rightarrow$$

$$I_1\ =\ [X^2(t)\ \frac{dr(\theta)}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt}]^2\ +\ k^2\ \frac{1}{r^2(\theta)}\quad\rightarrow$$

$$I_1 \; = \; [r'(\theta)]^2 \; + \; k^2 \; [\tfrac{1}{r(\theta)}]^2 \; , \qquad r'(\theta) \; = \; \tfrac{dr(\theta)}{d\theta} \; . \qquad (4.3.2.10a\text{-}b)$$

Definindo-se [vide expressão (3.3.3.13)]:

$$r^2(\theta) \; = \; \omega(\theta) \; , \qquad (4.3.2.11)$$

resultará:

$$\tfrac{d\omega(\theta)}{d\theta} \; = \; \omega'(\theta) \; = \; 2 \; r(\theta) \; \tfrac{dr(\theta)}{d\theta} \; = \; 2 \; r(\theta) \; r'(\theta) \quad \rightarrow$$

$$r'(\theta) \; = \; \tfrac{\omega'(\theta)}{2 \; \sqrt{\omega(\theta)}} \; . \qquad (4.3.2.12)$$

Tomando-se a expressão (4.3.2.10a), substituindo-se nela a expressão (4.3.2.12), e usando-se a expressão (4.3.2.11), obteremos:

$$I_1 \; = \; \tfrac{\omega'^2(\theta)}{4 \; \omega(\theta)} \; + \; \tfrac{k^2}{\omega(\theta)} \quad \rightarrow \quad \tfrac{\omega'^2(\theta)}{4} \; + \; k^2 \; = \; I_1 \; \omega(\theta) \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} \; \tfrac{d\omega(\theta)}{d\theta} \; = \; \sqrt{I_1 \; \omega(\theta) \; - \; k^2} \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} \; \tfrac{d\omega(\theta)}{\sqrt{I_1 \; \omega(\theta) \; - \; k^2}} \; = \; d\theta \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2 \; I_1} \; [I_1 \; \omega(\theta) \; - \; k^2]^{- \; 1/2} \; d[I_1 \; \omega(\theta) \; - \; k^2] \; = \; d\theta \; .$$

Integrando-se a expressão acima, virá:

$$\theta \; + \; I_2 \; = \; \tfrac{1}{I_1} \; \sqrt{I_1 \; \omega(\theta) \; - \; k^2} \; . \qquad (4.3.2.13)$$

onde a constante de integração I_2 representa o **segundo invariante de Ermakov-Lewis**.

Quadrando-se a expressão (4.3.2.13) e usando-se as expressões (4.3.2.7b,9a,c,11), virá:

$$(\theta \ + \ I_2)^2 \ = \ \frac{I_1 \ \omega(\theta) \ - \ k^2}{I_1^2} \quad \rightarrow \quad \omega(\theta) \ = \ \frac{I_1^2 \ (\theta \ + \ I_2)^2 \ + \ k^2}{I_1} \quad \rightarrow$$

$$r^2(\theta) \ = \ \frac{k^2}{I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ + \ I_1 \ \theta^2 \ + \ 2 \ I_1 \ I_2 \ \theta \quad \rightarrow$$

$$a^2(t) \ = \ \Big(\frac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \Big) \ X_1^2(t) \ +$$

$$+ \ I_1 \ X_2^2(t) \ + \ 2 \ I_1 \ I_2 \ X_1(t) \ X_2(t) \ , \qquad (4.3.2.14a)$$

onde:

$$X_1(t) \equiv X(t) \ , \qquad X_2(t) \equiv X(t) \int^t \frac{dt'}{X^2(t')} \ . \qquad (4.3.2.14b\text{-}c)$$

Observe-se que as expressões (4.3.2.14b-c) representam duas soluções independentes da equação indicada pela expressão (4.3.2.2) e que podem ser obtidas de qualquer solução particular dessa mesma equação.[9] Assim, considerando-se uma solução particular do tipo:

$$X_1(t) \ = \ cos \ (\omega \ t) \ , \qquad (4.3.2.15a)$$

a expressão (4.3.2.14c) nós mostra que (deveremos lembrar que $\int^x \frac{dx'}{cos^2 \ x'} \ = \ tg \ x \ = \ \frac{sen \ x}{cos \ x}$):

$$X_2(t) \ = \ \frac{cos \ (\omega \ t)}{\omega} \int^t \frac{d(\omega \ t')}{cos^2(\omega \ t')} \ = \ \frac{cos \ (\omega \ t)}{\omega} \ tg \ (\omega \ t) \quad \rightarrow$$

$$X_2(t) \ = \ \frac{1}{\omega} \ sen \ (\omega \ t) \ . \qquad (4.3.2.15b)$$

Derivando-se a expressão (4.3.2.14a) em relação ao tempo t e usando-se as expressões (4.3.2.4a-d,15a-b), teremos [é oportuno lembrar que $cos \ 0^o \ = \ 1$, $sen \ 0^o \ = \ 0$, e que, também, $\frac{d}{dz} \ (sen \ z) \ = \ cos \ z$, $\frac{d}{dz} \ (cos \ z) \ = \ - \ sen \ z$]:

$$2 \ a(t) \ \dot{a}(t) \ = \ \Big(\frac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \Big) \ 2 \ X_1(t) \ \dot{X}_1(t) \ +$$

$$+ \, 2 \, I_1 \, X_2(t) \, \dot{X}_2(t) \, + \, 2 \, I_1 \, I_2 \, [\dot{X}_1(t) \, X_2(t) \, + \, X_1(t) \, \dot{X}_2(t)] \quad \rightarrow$$

$$2 \, a_o \, b_o \, = \, \left(\tfrac{\hbar^2}{4 \, m^2 \, I_1} \, + \, I_1 \, I_2^2 \right) 2 \times 1 \times 0 \, +$$

$$+ \, 2 \, I_1 \times 0 \times 1 \, + \, 2 \, I_1 \, I_2 \, (0 \times 0 \, + \, 1 \times 1) \quad \rightarrow$$

$$a_o \, b_o \, = \, I_1 \, I_2 \, . \qquad (4.3.2.16a)$$

De maneira análoga, obteremos:

$$a_o^2 \, = \, (\tfrac{\hbar^2}{4 \, m^2 \, I_1} \, + \, I_1 \, I_2^2) \, . \qquad (4.3.2.16b)$$

Usando-se as expressões (4.3.2.16a-b), virá:

$$a_o^2 \, = \, (\tfrac{\hbar^2}{4 \, m^2 \, I_1} \, + \, I_1 \, \tfrac{4 \, a_o^2 \, b_o^2}{4 \, I_1^2}) \, = \, \tfrac{\hbar^2 \, + \, 4 \, m^2 \, a_o^2 \, b_o^2}{4 \, m^2 \, I_1} \quad \rightarrow$$

$$I_1 \, = \, \tfrac{\hbar^2 \, + \, 4 \, m^2 \, a_o^2 \, b_o^2}{4 \, m^2 \, a_o^2} \, , \qquad (4.3.2.17a)$$

$$I_2 \, = \, \tfrac{4 \, m^2 \, a_o^3 \, b_o}{\hbar^2 \, + \, 4 \, m^2 \, a_o^2 \, b_o^2} \, . \qquad (4.3.2.17b)$$

Substituindo-se as expressões (4.3.2.16a-b,17a) na expressão (4.3.2.14a), resultará:

$$a^2(t) \, = \, a_o^2 \, X_1^2(t) \, + \, (\tfrac{\hbar^2 \, + \, 4 \, m^2 \, a_o^2 \, b_o^2}{4 \, m^2 \, a_o^2}) \, X_2^2(t) \, +$$

$$+ \, 2 \, a_o \, b_o \, X_1(t) \, X_2(t) \quad \rightarrow \quad a^2(t) \, = \, a_o^2 \, [X_1^2(t) \, +$$

$$+ \, (\tfrac{\hbar^2}{4 \, m^2 \, a_o^4} \, + \, \tfrac{b_o^2}{a_o^2}) \, X_2^2(t) \, +$$

$$+ \, 2 \, \tfrac{b_o}{a_o} \, X_1(t) \, X_2(t)] \, . \qquad (4.3.2.18)$$

Considerando-se as expressões (3.2.2.23a) e (3.3.3.25b), ou seja:

$$\tau \ = \ \frac{2\ m\ a_o^2}{\hbar}\ , \qquad \zeta \ = \ \frac{2\ m\ a_o\ b_o}{\hbar}\ , \qquad \frac{\zeta}{\tau} \ = \ \frac{b_o}{a_o}, \qquad (4.3.2.19a\text{-}c)$$

e substituindo-as na expressão (4.3.2.18), obteremos:

$$a^2(t) \ = \ a_o^2\ [X_1^2(t) \ + \ (\frac{1\ +\ \zeta^2}{\tau^2})\ X_2^2(t) \ +$$

$$+ \ 2\ \frac{\zeta}{\tau}\ X_1(t)\ X_2(t)]\ . \qquad (4.3.2.20)$$

Usando-se as expressões (4.3.2.15a-b) e considerando-se que $sen\ 2z \ = \ 2\ sen\ z\ cos\ z$, a expressão acima ficará:

$$a^2(t) \ = \ a_o^2\ [cos^2\ (\omega\ t) \ + \ (\frac{1\ +\ \zeta^2}{\tau^2})\ \frac{1}{\omega^2}\ sen^2\ (\omega\ t) \ +$$

$$+ \ 2\ \frac{\zeta}{\tau}\ \frac{1}{\omega}\ cos\ (\omega\ t)\ sen\ (\omega\ t)]\ , \qquad (4.3.2.21a)$$

$$a^2(t) \ = \ a_o^2\ \mu(t)\ , \quad \mu(t) \ = \ cos^2\ (\omega\ t) \ +$$

$$+ \ A\ sen^2\ (\omega\ t) \ + \ B\ sen\ (2\ \omega\ t)\ , \qquad (4.3.2.21b\text{-}c)$$

onde:

$$A \ = \ \frac{1\ +\ \zeta^2}{\omega^2\ \tau^2}\ , \qquad B \ = \ \frac{\zeta}{\omega\ \tau}\ , \qquad (4.3.2.22a\text{-}b)$$

$$A \ = \ B^2 \ + \ \frac{1}{\omega^2\ \tau^2}\ . \qquad (4.3.2.22c)$$

Desse modo, obtidos os valores de $X(t)$ e de $a(t)$ [vide expressões (4.3.2.5,21a-c)], calculemos o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm do oscilador harmônico simples** usando-se a expressão (4.2.2.13). Assim, derivando-se a expressão (4.3.2.21b) em relação ao tempo t e usando-se a expressão (4.3.2.21c), teremos (lembrar a expressão do seno do dobro de um arco vista acima):

$$2\ a(t)\ \dot{a}(t)\ =\ a_o^2 \Big(\ 2\ cos\ (\omega\ t)\ \tfrac{d}{dt}\ [cos\ (\omega\ t)]\ +$$

$$+\ 2\ A\ sen\ (\omega\ t)\ \tfrac{d}{dt}\ [sen\ (\omega\ t)]\ +\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)\ \tfrac{d}{dt}\ [2\ \omega\ t]\ \Big)\ =$$

$$=\ a_o^2\ \omega\ [-\ 2\ cos\ (\omega\ t)\ sen\ (\omega\ t)\ +\ 2\ A\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ +$$

$$+\ 2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\ \ \rightarrow\ \ \dot{a}(t)\ =\ \tfrac{\omega\ a_o^2}{2\ a(t)}\ [(A\ -\ 1)\ sen\ (2\ \omega\ t)\ +$$

$$+\ 2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\ .\qquad (4.3.2.23)$$

Considerando-se as expressões (4.3.2.4d,21b,23), teremos (lembrar que $cos\ 0^o\ =\ 1$ e que $sen\ 0^o\ =\ 0$):

$$\dot{a}(0)\ =\ b_o\ =\ \tfrac{\omega\ a_o^2}{2\ a_o}\ 2\ B\ \ \rightarrow\ \ B\ =\ \tfrac{b_o}{\omega\ a_o}\ ,\qquad (4.3.2.24)$$

$$\tfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ =\ \tfrac{\omega\ a_o^2}{2\ a^2(t)}\ [(A\ -\ 1)\ sen\ (2\ \omega\ t)\ +$$

$$+\ 2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\ ,\qquad (4.3.2.25)$$

$$\sqrt{\tfrac{a_o}{a(t)}}\ =\ \sqrt{\tfrac{a_o}{a_o\ \sqrt{\mu(t)}}}\ =\ [\mu(t)]^{-\ 1/4}\ .\qquad (4.3.2.26)$$

Por outro lado, tomando-se a expressão (4.3.2.5), resultará:

$$x\ -\ X(t)\ =\ x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)\ -$$

$$-\ \tfrac{v_o}{\omega}\ sen\ (\omega\ t)\ ,\qquad (4.3.2.27a)$$

$$[x\ -\ X(t)]^2\ =\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2\ -$$

$$-\ 2\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]\ \tfrac{1}{\omega}\ sen\ (\omega\ t)\ v_o\ +$$

$$+ \ \frac{1}{\omega^2} \ sen^2 \ (\omega \ t) \ v_o^2 \ , \qquad (4.3.2.27b)$$

$$\dot{X}(t) \ = \ - \ \omega \ x_o \ sen \ (\omega \ t) \ + \ cos \ (\omega \ t) \ v_o \ . \qquad (4.3.2.27c)$$

Tomando-se a expressão (4.2.2.13) e inserindo-se nela as expressões (4.3.2.21b,25,26,27a-c), o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm do oscilador harmônico simples** tomará a seguinte forma:

$$K(x, \ x_o, t) \ = \ \frac{m}{2 \ \pi \ \hbar} \int_{- \ \infty}^{+ \ \infty} dv_o \ [\mu(t)]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Bigg[\ \Big(\ \frac{i \ m}{2 \ \hbar} \ \frac{\omega \ a_o^2}{2 \ a^2(t)} \ [(A \ - \ 1) \ sen \ (2 \ \omega \ t) \ +$$

$$+ \ 2 \ B \ cos \ (2 \ \omega \ t)] \ - \ \frac{1}{4 \ a^2(t)} \ \Big) \ \times$$

$$\times \ \Big(\ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)]^2 \ - \ 2 \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)] \ \times$$

$$\times \ \frac{1}{\omega} \ sen \ (\omega \ t) \ v_o \ + \ \frac{1}{\omega^2} \ sen^2 \ (\omega \ t) \ v_o^2 \ \Big) \ \Bigg] \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big(\ \frac{i \ m}{\hbar} \ [- \ \omega \ x_o \ sen \ (\omega \ t) \ + \ v_o \ cos \ (\omega \ t)] \ \times$$

$$\times \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t) \ - \ \frac{v_o}{\omega} \ sen \ (\omega t)] \ \Big) \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{\hbar} \ \int_o^t dt' \ \Big(\ [\frac{1}{2} \ m \ [- \ \omega \ x_o \ sen \ (\omega \ t') \ +$$

$$+ \ v_o \ cos \ (\omega \ t')]^2 \ - \ \frac{1}{2} \ m \ \omega^2 \ [x_o \ cos \ (\omega \ t') \ +$$

$$+ \ \frac{v_o}{\omega} \ sen \ (\omega \ t')]^2 \ - \ \frac{\hbar^2}{4 \ m \ a^2(t')}] \ \Big) \ \Big] \ . \qquad (4.3.2.28)$$

Considerando-se que a integral indicada na expressão (4.3.2.28) é realizada no espaço dos v_o, vamos preparar o seu integrando envolvendo potências dessa variável de integração para que possamos utilizar a expressão (4.3.1.6), ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; e^{(- D \; v_o^2 \; + \; E \; v_o)} \; = \; \sqrt{\frac{\pi}{D}} \; e^{\frac{E^2}{4 \; D}} \; . \qquad (4.3.2.29)$$

Para determinarmos os valores de D e E da expressão acima, vamos trabalhar com as exponenciais indicadas na expressão (4.3.2.28). Desse modo, teremos:

$$K(x, \; x_o, \; t) \; = \; \frac{m}{2 \; \pi \; \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_o \; [\mu(t)]^{- \; 1/4} \; \times$$

$$\times \; EXP1 \; \times \; EXP2 \; \times \; EXP3 \; , \qquad (4.3.2.30)$$

onde:

$$EXP1 \; = \; exp \Bigg[\Big(\frac{i \; m}{2 \; \hbar} \; \frac{\omega \; a_o^2}{2 \; a^2(t)} \; [(A \; - \; 1) \; sen \; (2 \; \omega \; t) \; +$$

$$+ \; 2 \; B \; cos \; (2 \; \omega \; t)] \; - \; \frac{1}{4 \; a^2(t)} \Big) \times \Big([x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)]^2 \; -$$

$$- \; 2 \; [x - x_o \; cos \; (\omega \; t)] \; \frac{1}{\omega} \; sen \; (\omega \; t) \; v_o + \frac{1}{\omega^2} \; sen^2 \; (\omega \; t) \; v_o^2 \Big) \Bigg] \; \rightarrow$$

$$EXP1 \; = \; exp \Big(\; F(t) \; [x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)]^2 \; \Big) \; v_o^0 \; \times$$

$$\times \; exp \Big(\; - \; 2 \; F(t) \; [x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)] \; \frac{1}{\omega} \; sen \; (\omega \; t) \; \Big) \; v_o^1 \; \times$$

$$\times \; exp \; [\frac{F(t)}{\omega^2} \; sen^2 \; (\omega \; t)] \; v_o^2 \; , \qquad (4.3.2.31a)$$

sendo:

$$F(t) \ = \ \frac{i \ m \ \omega \ a_o^2}{4 \ \hbar \ a^2(t)} \ [(A \ - \ 1) \ sen \ (2 \ \omega \ t) \ +$$

$$+ \ 2 \ B \ cos \ (2 \ \omega \ t)] \ - \ \frac{1}{4 \ a^2(t)} \quad \rightarrow$$

$$F(t) \ = \ - \ \frac{1}{4 \ a^2(t)} \ [1 \ - \ \frac{i \ m \ \omega \ a_o^2}{\hbar} \ [(A \ - \ 1) \ sen \ (2 \ \omega \ t) \ +$$

$$+ \ 2 \ B \ cos \ (2 \ \omega \ t)] \ , \qquad (4.3.2.31b)$$

$$EXP2 \ = \ exp \ \Big(\frac{i \ m}{\hbar} \ [- \ \omega \ x_o \ sen \ (\omega \ t) \ + \ cos \ (\omega \ t) \ v_o] \ \times$$

$$\times \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t) \ - \ \frac{v_o}{\omega} \ sen \ (\omega \ t)] \Big) \ =$$

$$= exp \ \Big(\ \frac{i \ m}{\hbar} \ [- \ \omega \ x_o \ sen \ (\omega \ t)] \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)] \ \Big) \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big(\ \frac{i \ m}{\hbar} \ cos \ (\omega \ t) \ v_o \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)] \ \Big) \times$$

$$\times \ exp \ [\frac{i \ m}{\hbar} \ x_o \ v_o \ sen^2 \ (\omega \ t)] \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big(\ - \ \frac{i \ m}{\hbar} \ \frac{1}{\omega} \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ v_o^2 \ \Big) \quad \rightarrow$$

$$EXP2 \ = \ exp \ \Big[\ \Big(\ \frac{i \ m}{\hbar} \ [- \ \omega \ x_o \ sen \ (\omega \ t)] \ \times$$

$$\times \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)] \ \Big) \ v_o^0 \ \Big] \ \times \ exp \ \Big[\ \frac{i \ m}{\hbar} \ \Big(\ x_o \ sen^2 \ (\omega \ t) \ +$$

$$+ \ cos \ (\omega \ t) \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)] \ \Big) \ v_o^1 \ \Big] \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big(\ [- \ \frac{i \ m}{\hbar} \ \frac{1}{\omega} \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t)] \ v_o^2 \ \Big) \ , \ \ (4.3.2.32)$$

$$EXP3 \ = \ exp \ [\frac{i}{\hbar} \ (J_1 \ - \ J_2 \ - \ J_3)] \ , \qquad (4.3.2.33a)$$

com:

$$J_1 \;=\; \int_o^t dt' \; \tfrac{1}{2} \; m \; [- \; \omega \; x_o \; sen \; (\omega \; t') \; +$$

$$+ \; v_o \; cos \; (\omega \; t')]^2 \; , \qquad (4.3.2.33b)$$

$$J_2 \;=\; \int_o^t dt' \; \tfrac{1}{2} \; m \; \omega^2 \; [x_o \; cos \; (\omega \; t') \; +$$

$$+ \; \tfrac{v_o}{\omega} \; sen \; (\omega \; t')]^2 \; , \qquad (4.3.2.33c)$$

$$J_3 \;=\; \int_o^t dt' \; \frac{\hbar^2}{4 \; m \; a^2(t')} \; . \qquad (4.3.2.33d)$$

Para realizarmos as integrais J_1 e J_2 usaremos as seguintes identidades:[5]

$$\int_o^z sen^2 \; z' \; dz' \;=\; - \; \tfrac{1}{2} \; sen \; z \; cos \; z \; + \; \tfrac{1}{2} \; z \; , \qquad (4.3.2.34a)$$

$$\int_o^z cos^2 \; z' \; dz' \;=\; \tfrac{1}{2} \; sen \; z \; cos \; z \; + \; \tfrac{1}{2} \; z \; , \qquad (4.3.2.34b)$$

$$\int_o^z sen \; z' \; cos \; z' \; dz' \;=\; \frac{sen^2 \; z}{2} \; . \qquad (4.3.2.34c)$$

Usando-se as expressões acima, teremos:

$$J_1 \;=\; \frac{m}{2 \; \omega} \int_o^t d(\omega t') \; [\omega^2 \; x_o^2 \; sen^2 \; (\omega \; t') \; + \; v_o^2 \; cos^2 \; (\omega \; t') \; -$$

$$- \; 2 \; \omega \; x_o \; v_o \; sen \; (\omega \; t') \; cos \; (\omega \; t')] \quad \rightarrow$$

$$J_1 \;=\; \frac{m}{4 \; \omega} \; \Big(\; \omega^2 \; x_o^2 \; [- \; sen \; (\omega \; t) \; cos \; (\omega \; t) \; + \; \omega \; t] \; +$$

$$+ \; v_o^2 \; [sen \; (\omega \; t) \; cos \; (\omega \; t) \; + \; \omega \; t] \; -$$

$$- \; 2 \; \omega \; x_o \; v_o \; sen^2 \; (\omega \; t) \; \Big) \; . \qquad (4.3.2.35)$$

De maneira análoga, teremos:

$$J_2 \ = \ \tfrac{m \ \omega}{2} \int_o^t d(\omega t') \ [x_o^2 \ cos^2 \ (\omega \ t') \ + \ \tfrac{v_o^2}{\omega^2} \ sen^2 \ (\omega \ t') \ +$$

$$+ \ 2 \ x_o \ \tfrac{v_o}{\omega} \ sen \ (\omega \ t') \ cos \ (\omega \ t')] \ \ \rightarrow$$

$$J_2 \ = \ \tfrac{m \ \omega}{4} \ \Big(\ x_o^2 \ [sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \omega \ t] \ +$$

$$+ \ \tfrac{v_o^2}{\omega^2} \ [- \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \omega \ t] \ +$$

$$+ \ 2 \ x_o \ \tfrac{v_o}{\omega} \ sen^2 \ (\omega \ t) \ \Big) \ . \qquad (4.3.2.36)$$

Subtraindo-se as expressões (4.3.2.35-36), virá:

$$J_1 \ - \ J_2 \ = \ \tfrac{\omega \ m}{4} \ \Bigg(\ x_o^2 \ [- \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \omega \ t] \ +$$

$$+ \ \tfrac{v_o^2}{\omega^2} \ [sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \omega \ t] \ - \ 2 \ x_o \ \tfrac{v_o}{\omega} \ sen^2 \ (\omega \ t) \ -$$

$$- \ x_o^2 \ [sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \omega \ t] \ -$$

$$- \ \tfrac{v_o^2}{\omega^2} \ [- \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) + \omega \ t] \ - \ 2 \ x_o \ \tfrac{v_o}{\omega} \ sen^2 \ (\omega \ t) \Bigg) \ \ \rightarrow$$

$$J_1 \ - \ J_2 \ = \ - \ \tfrac{\omega \ m}{2} \ x_o^2 \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ v_o^0 \ -$$

$$- \ m \ x_o \ sen^2 \ (\omega \ t) \ v_o^1 \ +$$

$$+ \ \tfrac{m}{2 \ \omega} \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ v_o^2 \ . \qquad (4.3.2.37)$$

Usando-se as expressões (4.3.2.21c,33d), virá:

$$J_3 \; = \; \frac{\hbar^2}{4 \; m \; a_o^2 \; \omega} \; \times$$

$$\times \int_o^t \frac{d(\omega \; t')}{cos^2 \; (\omega \; t') \; + \; A \; sen^2 \; (\omega \; t') \; + \; B \; sen \; (2 \; \omega \; t')} \; . \qquad (4.3.2.38)$$

Para resolvermos a integral indicada acima, usaremos a seguinte identidade:[5]

$$\int_o^z \frac{dz'}{cos^2 \; (z') \; + \; A \; sen^2 \; (z') \; + \; B \; sen \; (2 \; z')} \; =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A \; - \; B^2}} \; \Big(\; arctg \; [\frac{B \; + \; A \; tg \; z}{\sqrt{A \; - \; B^2}}] \; -$$

$$- \; arctg \; [\frac{B}{\sqrt{A \; - \; B^2}}] \; \Big) \; . \qquad (4.3.2.39)$$

Considerando-se a expressão (4.3.2.38), substituindo-se nela a expressão (4.3.2.39) e, em seguida, usando-se as expressões (4.3.1.12c) e (4.3.2.19a,22c), resultará:

$$J_3 \; = \; \frac{\hbar^2}{4 \; m \; a_o^2 \; \omega} \; \times \; \frac{1}{\sqrt{1/(\omega \; \tau)^2}} \; \times$$

$$\times \; \Big[\; arctg \; \Big(\; \frac{1}{\sqrt{1/(\omega \; \tau)^2}} \; [B \; + \; A \; tg \; (\omega \; t)] \; \Big) \; -$$

$$- \; arctg \; [\frac{1}{\sqrt{1/(\omega \; \tau)^2}} \; B] \; \Big] \; =$$

$$= \; \frac{\hbar^2 \; \omega \; \tau}{2 \; \hbar \; \omega \; \tau} \; arctg \; \Big(\; \frac{\omega \; \tau \; [B \; + \; A \; tg \; (\omega \; t)] \; - \; \omega \; \tau \; B}{1 \; + \; \omega^2 \; \tau^2 \; B \; [B \; + \; A \; tg \; (\omega \; t)]} \; \Big) \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{2} \; arctg \; \Big(\; \frac{\omega \; \tau \; A \; tg \; (\omega \; t)}{1 \; + \; \omega^2 \; \tau^2 \; B \; [B \; + \; A \; tg \; (\omega \; t)]} \; \Big) \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{2} \; arctg \; \Big(\frac{\omega \; \tau \; A \; tg \; (\omega \; t)}{\omega^2 \; \tau^2 \; [\frac{1}{\omega^2 \; \tau^2} \; + \; B^2 \; + \; A \; B \; tg \; (\omega \; t)]} \; \Big) \; =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\ arctg\ \left(\frac{\omega\ \tau\ A\ tg\ (\omega\ t)}{\omega^2\ \tau^2\ [A\ +\ A\ B\ tg\ (\omega\ t)]}\right)\ \ \rightarrow$$

$$J_3\ =\ \frac{\hbar}{2}\ arctg\ \left(\frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau\ [1\ +\ B\ tg\ (\omega\ t)]}\right)\ . \qquad (4.3.2.40a)$$

Substituindo-se as expressões (4.3.2.37,40a) na expressão (4.3.2.33a), virá:

$$EXP3\ =\ exp\ \Bigg(\ \Big[\ -\ \frac{i\ \omega\ m}{2\ \hbar}\ x_o^2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -$$

$$-\ \frac{i}{2}\ arctg\ \left(\ \frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau\ [1\ +\ B\ tg\ (\omega\ t)]}\ \right)\ \Big]\ v_o^0\ -\ \frac{i\ m}{\hbar}\ x_o\ sen^2\ (\omega\ t)\ v_o^1\ +$$

$$+\ \frac{i\ m}{2\ \hbar\ \omega}\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ v_o^2\ \Bigg)\ . \qquad (4.3.2.40b)$$

A fim de usarmos a expressão (4.3.2.29), agruparemos as potências de v_o nos argumentos das EXP1-3 [vide expressões (4.3.2.31a,32,40b)]. Desse modo, usando-se a expressão (4.3.2.31b), teremos:

$$v_o^0\ \Big[\ F(t)\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2\ +\ \frac{i\ m}{\hbar}\ [-\ \omega\ x_o\ sen\ (\omega\ t)]\ \times$$

$$\times\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]\ -\ \frac{i\ \omega\ m}{2\ \hbar}\ x_o^2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -$$

$$-\ \frac{i}{2}\ arctg\ \left(\ \frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau\ [1\ +\ B\ tg(\omega\ t)]}\ \right)\ \Big]\ \ \rightarrow$$

$$v_o^0\ \Big[\ F(t)\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2\ -\ \frac{i\ m\ \omega}{\hbar}\ x_o\ x\ sen\ (\omega\ t)\ +$$

$$+\ \frac{i\ m\ \omega}{\hbar}\ x_o^2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -\ \frac{i\ \omega\ m}{2\ \hbar}\ x_o^2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -$$

$$-\ \frac{i}{2}\ arctg\ \left(\ \frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau[1\ +\ B\ tg(\omega\ t)]}\ \right)\ \Big]\ \ \rightarrow$$

$$v_o^0 \Big[\; F(t) \; [x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)]^2 \; - \; \tfrac{i \; m \; \omega}{\hbar} \; x_o \; x \; sen \; (\omega \; t) \; +$$

$$+ \; \tfrac{i \; m \; \omega}{2 \; \hbar} \; x_o^2 \; sen \; (\omega \; t) \; cos \; (\omega \; t) \; -$$

$$- \; \tfrac{i}{2} \; arctg \; \Big(\; \tfrac{tg \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau[1 \; + \; B \; tg(\omega \; t)]} \; \Big) \; \Big] \; , \qquad (4.3.2.41)$$

$$v_o^1 \Big[\; - \; 2 \; F(t) \; [x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)] \; \tfrac{1}{\omega} \; sen \; (\omega \; t) \; +$$

$$+ \; \tfrac{i \; m}{\hbar} \; \Big(\; x_o \; sen^2 \; (\omega \; t) \; +$$

$$+ \; cos \; (\omega \; t) \; [x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)] \; \Big) \; - \; \tfrac{i \; m}{\hbar} \; x_o \; sen^2 \; (\omega \; t) \; \Big] \quad \rightarrow$$

$$v_o^1 \Big(\; [x - x_o \, cos \, (\omega \, t)] \Big[- \tfrac{2 \; sen \; (\omega \; t)}{\omega} \, F(t) + \tfrac{i \; m}{\hbar} \, cos \, (\omega \, t) \Big] \Big) \quad \rightarrow$$

$$v_o^1 \; \Big(\; [x \; - \; x_o \; cos \; (\omega \; t)] \; G(t) \; \Big) \; , \qquad (4.3.2.42a)$$

onde:

$$G(t) \; = \; - \; \tfrac{2 \; sen \; (\omega \; t)}{\omega} \; F(t) \; + \; \tfrac{i \; m}{\hbar} \; cos \; (\omega \; t) \; , \qquad (4.3.2.42b)$$

$$v_o^2 \; \Big[\; \tfrac{F(t)}{\omega^2} \; sen^2 \; (\omega \; t) \; - \; \tfrac{i \; m}{\hbar \; \omega} \; sen \; (\omega \; t) \; cos \; (\omega \; t) \; +$$

$$+ \; \tfrac{i \; m}{2 \; \hbar \; \omega} \; sen \; (\omega \; t) \; cos \; (\omega \; t) \; \Big] \quad \rightarrow$$

$$v_o^2 \; \Big(\; \tfrac{sen^2 \; (\omega \; t)}{\omega^2} \; \; F(t) \; - \; \tfrac{i \; m}{2 \; \hbar \; \omega} \; sen \; (\omega \; t) \; cos \; (\omega \; t) \; \Big) \quad \rightarrow$$

$$v_o^2 \; \Big(\; - \; \tfrac{sen \; (\omega \; t)}{2 \; \omega} \; [- \; \tfrac{2 \; sen \; (\omega \; t)}{\omega} \; F(t) \; + \; \tfrac{i \; m}{\hbar} \; cos \; (\omega \; t)] \; \Big) \quad \rightarrow$$

$$v_o^2 \; \Big(\; - \; \tfrac{sen \; (\omega \; t)}{2 \; \omega} \; G(t) \; \Big) \; . \qquad (4.3.2.43)$$

Levando-se as expressões (4.3.2.41,42a-b,43) na expressão (4.3.2.30), e usando-se a expressão (4.3.2.29), teremos:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\mu(t)]^{-\ 1/4}\ exp\ \Bigg[F(t)[x - x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2 -$$

$$-\ \frac{i\ m\ \omega}{\hbar}\ x_o\ x\ sen\ (\omega\ t)\ +\ \frac{i\ m\ \omega}{2\ \hbar}\ x_o^2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -$$

$$-\ \frac{i}{2}\ arctg\ \Big(\ \frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau[1\ +\ B\ tg\ (\omega\ t)]}\ \Big)\ \Bigg]\ \times$$

$$\times\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ exp\ \Big(\ -\ \frac{sen\ (\omega\ t)}{2\ \omega}\ G(t)\ v_o^2\ +$$

$$+\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]\ G(t)\ v_o\ \Big)\ =$$

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ exp\ \Bigg[F(t)[x - x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2 -$$

$$-\ \frac{i\ m\ \omega}{\hbar}\ x_o\ x\ sen\ (\omega\ t)\ +\ \frac{i\ m\ \omega}{2\ \hbar}\ x_o^2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -$$

$$-\ \frac{i}{2}\ arctg\ \Big(\ \frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau[1\ +\ B\ tg\ (\omega\ t)]}\ \Big)\ \Bigg]\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{2\ \pi\ \omega}{sen\ (\omega\ t)\ G(t)}}\ exp\ \Big(\ \frac{\omega\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2\ G(t)}{2\ sen\ (\omega\ t)}\ \Big)\ . \qquad (4.3.2.44)$$

Reduzindo-se os termos semelhantes nos argumentos das exponenciais indicadas na expressão (4.3.2.44), e usando-se a expressão (4.3.2.42b), virá:

$$ARGEXP\ =\ \frac{\omega\ [x\ -\ x_o\ cos\ (\omega\ t)]^2}{2\ sen\ (\omega\ t)}\ \times$$

$$\times \ [- \ \tfrac{2 \ F(t) \ sen \ (\omega \ t)}{\omega} \ + \ \tfrac{i \ m}{\hbar} \ cos \ (\omega \ t)] \ +$$

$$+ \ F(t) \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)]^2 \ - \ \tfrac{i \ m \ \omega}{\hbar} \ x_o \ x \ sen \ (\omega \ t) \ +$$

$$+ \ \tfrac{i \ m \ \omega}{2 \ \hbar} \ x_o^2 \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ = \ - \ F(t) \ [x - x_o \ cos \ (\omega \ t)]^2 \ +$$

$$+ \ \tfrac{i \ m \ \omega \ [x \ - \ x_o \ cos \ (\omega \ t)]^2}{2 \ \hbar \ sen \ (\omega \ t)} \ cos \ (\omega \ t) \ + \ F(t) \ [x - x_o \ cos \ (\omega \ t)]^2 \ -$$

$$- \ \tfrac{i \ m \ \omega}{\hbar} \ x_o \ x \ sen \ (\omega \ t) \ + \ \tfrac{i \ m \ \omega}{2 \ \hbar} \ x_o^2 \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ =$$

$$= \ \tfrac{i \ m \ \omega \ cos(\omega \ t)}{2 \ \hbar \ sen \ (\omega \ t)} \ [x^2 \ - \ 2 \ x \ x_o \ cos \ (\omega \ t) \ + \ x_o^2 \ cos^2 \ (\omega \ t)] \ -$$

$$- \ \tfrac{i \ m \ \omega}{\hbar} \ x_o \ x \ sen \ (\omega \ t) \ + \ \tfrac{i \ m \ \omega}{2 \ \hbar} \ x_o^2 \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ =$$

$$= \ \tfrac{i \ m \ \omega}{2 \ \hbar \ sen \ (\omega \ t)} \ [x^2 \ cos \ (\omega \ t) \ - \ 2 \ x \ x_o \ cos^2 \ (\omega \ t) \ +$$

$$+ \ x_o^2 \ cos^3 \ (\omega \ t) \ - \ 2 \ x \ x_o \ sen^2 \ (\omega \ t) \ +$$

$$+ \ x_o^2 \ sen^2 \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t)] \ = \ \tfrac{i \ m \ \omega}{2 \ \hbar \ sen \ (\omega \ t)} \ \Big(\ x^2 \ cos \ (\omega \ t) \ -$$

$$- \ 2 \ x \ x_o \ [cos^2 \ (\omega \ t) \ + \ sen^2 \ (\omega \ t)] \ +$$

$$+ \ x_o^2 \ cos \ (\omega \ t) \ [cos^2 \ (\omega \ t) \ + \ sen^2 \ (\omega \ t)] \ \Big) \quad \to$$

$$ARGEXP \ = \ \tfrac{i \ m \ \omega}{2 \ \hbar \ sen \ (\omega \ t)} \ \times$$

$$\times \ [(x^2 \ + \ x_o^2) \ cos \ (\omega \ t) \ - \ 2 \ x \ x_o] \ . \qquad (4.3.2.45)$$

Considerando-se a expressão (4.3.2.44) e inserindo-se nela a expressão (4.3.2.45), resultará:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\mu(t)]^{-\ 1/4}\ \sqrt{\frac{2\ \pi\ \omega}{sen\ (\omega\ t)\ G(t)}}\ \times$$

$$\times\ exp\Big[-\ \frac{i}{2}\ arctg\Big(\frac{tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau[1\ +\ B\ tg\ (\omega\ t)]}\Big)\Big]\times exp\Big(\frac{i\ m\ \omega}{2\ \hbar\ sen\ (\omega\ t)}\ \times$$

$$\times\ [(x^2\ +\ x_o^2)\ cos\ (\omega\ t)\ -\ 2\ x\ x_o]\Big)\ . \qquad (4.3.2.46)$$

Agora, vamos encontrar uma forma mais compacta para $G(t)$, dada pela expressão (4.3.2.42b). Assim, usando-se as expressões (4.3.2.19a,21b-c,31b), virá (deveremos lembrar que $sen\ 2\ z\ =\ 2\ sen\ z\ cos\ z$, $cos\ 2\ z\ =\ 1\ -\ 2\ sen^2\ z$):

$$G(t)\ =\ \frac{i\ m\ cos\ (\omega\ t)}{\hbar}\ +\ \frac{sen\ (\omega\ t)}{2\ \omega\ a^2(t)}\ \Big(1\ -\ \frac{i\ m\ \omega\ a_o^2}{\hbar}\ \times$$

$$\times\ [(A\ -\ 1)\ sen\ (2\ \omega\ t)\ +\ 2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\Big)\ =$$

$$=\ \frac{i\ m\ cos\ (\omega\ t)}{\hbar}\ \Big[1\ +\ \frac{\hbar\ sen\ (\omega\ t)}{2\ i\ m\ \omega\ cos\ (\omega\ t)\ a^2(t)}\ \times$$

$$\times\Big(1-\frac{i\ m\ \omega\ a_o^2}{\hbar}\ [(A-1)\ sen\ (2\ \omega\ t)+2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\Big)\Big]\ =$$

$$=\ \frac{i\ m\ cos\ (\omega\ t)}{\hbar}\ \Big[\frac{\mu(t)}{\mu(t)}\ -\ \frac{i\ \hbar\ tg\ (\omega\ t)}{2\ m\ \omega\ a_o^2\ \mu(t)}\ \times$$

$$\times\Big(1-\frac{i\ m\ \omega\ a_o^2}{\hbar}\ [(A-1)\ sen\ (2\ \omega\ t)+2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\Big)\Big]\ =$$

$$=\ \frac{i\ m\ cos\ (\omega\ t)}{\hbar\ \mu(t)}\ \Big[cos^2\ (\omega\ t)\ +\ A\ sen^2\ (\omega\ t)\ +$$

$$+\ B\ sen\ (2\ \omega\ t)\ -\ \frac{i\ \hbar\ tg\ (\omega\ t)}{2\ m\ \omega\ a_o^2}\ \times$$

$$\times\Big(1-\frac{i\ m\ \omega\ a_o^2}{\hbar}\ [(A-1)\ sen\ (2\ \omega\ t)+2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\Big)\Big]\ =$$

$$= \frac{i\ m\ cos\ (\omega\ t)}{\hbar\ \mu(t)} \Big[cos^2\ (\omega\ t)\ +\ A\ sen^2\ (\omega\ t) +$$

$$+\ B\ sen\ (2\ \omega\ t)\ -\ \frac{i\ tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau} -$$

$$-\ \frac{sen\ (\omega\ t)}{2\ cos\ (\omega\ t)}\ [(A\ -\ 1)\ 2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t) +$$

$$+\ 2\ B\ cos\ (2\ \omega\ t)]\ \Big)\ \Big]\ =$$

$$= \frac{i\ m\ cos\ (\omega\ t)}{\hbar\ \mu(t)} \Big(\ cos^2\ (\omega\ t)\ +\ A\ sen^2\ (\omega\ t) +$$

$$+\ B\ 2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -\ \frac{i\ tg\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau} -$$

$$-\ A\ sen^2\ (\omega\, t) + sen^2\ (\omega\, t) - B\ tg\ (\omega\, t)\ [1 - sen^2\ (\omega\, t)]\ \Big)\ =$$

$$= \frac{i\ m}{\hbar\ \mu(t)} \Big[\ cos\ (\omega\ t)\ -\ i\ \frac{sen\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau} +$$

$$+\ B\ \Big(\ cos\ (\omega\ t)\ 2\ sen\ (\omega\ t)\ cos\ (\omega\ t)\ -\ sen\ (\omega\ t)\ \times$$

$$\times\ [1\ -\ 2\ sen^2\ (\omega\ t)]\ \Big)\ \Big]\ =\ \frac{i\ m}{\hbar\ \mu(t)} \Big[\ cos\ (\omega\ t)\ -\ i\ \frac{sen\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau} +$$

$$+\ B\ \Big(\ 2\ sen\ (\omega\, t)\ cos^2\ (\omega\, t)\ -\ sen\ (\omega\, t)\ +\ 2\ sen^3\ (\omega\, t)]\Big)\Big]\ =$$

$$= \frac{i\ m}{\hbar\ \mu(t)} \Big(\ cos\ (\omega\ t)\ -\ i\ \frac{sen\ (\omega\ t)}{\omega\ \tau} +$$

$$+\ B\ \Big(\ 2\ sen\ (\omega\ t)\ [cos^2\ (\omega\ t)\ +\ sen^2\ (\omega\ t)]\ -\ sen\ (\omega\ t)\Big)\ \rightarrow$$

$$G(t)\ =\ \frac{i\ m}{\hbar\ \mu(t)}\ [cos\ (\omega\ t) -$$

$$- \; i \; \frac{sen \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau} \; + \; B \; sen \; (\omega \; t)] \; . \qquad (4.3.2.47)$$

Tomando-se a expressão (4.3.2.46) e substituindo-se nela a expressão (4.3.2.47), obteremos:

$$K(x, \; x_o, \; t) \; = \; \frac{m}{2 \; \pi \; \hbar} \; [\mu(t)]^{- \; 1/4} \; \sqrt{\frac{2 \; \pi \; \omega}{sen \; (\omega \; t)}} \; \times$$

$$\times \; \sqrt{\frac{\hbar \; \mu(t)}{i \; m \; [cos \; (\omega \; t) \; - \; \frac{i \; sen \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau} \; + \; B \; sen \; (\omega \; t)]}} \; \times$$

$$\times \; exp \; \Big[\; - \; \frac{i}{2} \; arctg \; \Big(\; \frac{tg \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau[1 \; + \; B \; tg \; (\omega \; t)]} \; \Big) \; \Big] \; \times$$

$$\times \; exp \; \Big(\; \frac{i \; m \; \omega}{2 \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)} \; [(x^2 \; + \; x_o^2) \; cos \; (\omega \; t) \; - \; 2 \; x \; x_o] \; \Big) \; \; \rightarrow$$

$$K(x, \; x_o, \; t) \; = \; [\mu(t)]^{1/4} \; \sqrt{\frac{1}{cos \; (\omega \; t) \; - \; \frac{i \; sen \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau} \; + \; B \; sen \; (\omega \; t)}} \; \times$$

$$\times \; exp \; \Big[\; - \; \frac{i}{2} \; arctg \; \Big(\; \frac{tg \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau[1 \; + \; B \; tg \; (\omega \; t)]} \; \Big) \; \Big] \; \times$$

$$\times \; \Bigg[\; \sqrt{\frac{m \; \omega}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)}} \; exp \; \Big(\; \frac{i \; m \; \omega}{2 \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)} \; \times$$

$$\times \; [(x^2 \; + \; x_o^2) \; cos \; (\omega \; t) \; - \; 2 \; x \; x_o] \; \Big) \; \Bigg] \; . \qquad (4.3.2.48)$$

Aplicando-se a expressão (4.3.1.19) ao segundo fator da expressão acima e usando-se as expressões (4.3.2.21c,22c), teremos (lembrar a expressão do seno do dobro de um arco vista acima):

$$\sqrt{\frac{1}{cos \; (\omega \; t) \; + \; B \; sen \; (\omega \; t) \; - \; \frac{i \; sen \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau}}} \; =$$

$$= \Big[\ cos \ (\omega \ t) \ + \ B \ sen \ (\omega \ t) \ - \ \frac{i \ sen \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau} \ \Big]^{- \ 1/2} \ =$$

$$= \Big(\ [cos \ (\omega \ t) \ + \ Bsen \ (\omega \ t)]^2 \ + \ \frac{sen^2 \ (\omega \ t)}{\omega^2 \ \tau^2} \ \Big)^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{2} \ arctg\Big(\ \frac{sen \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau \ [cos \ (\omega \ t) \ + \ B \ sen \ (\omega \ t)]} \ \Big) \ \Big] \ =$$

$$= \ [cos^2 \ (\omega \ t) \ + \ B^2 \ sen^2 \ (\omega \ t) \ +$$

$$+ \ 2 \ B \ sen \ (\omega \ t) \ cos \ (\omega \ t) \ + \ \frac{sen^2 \ (\omega \ t)}{\omega^2 \ \tau^2}]^{- \ 1/4} \quad \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{2} \ arctg\Big(\ \frac{sen \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau \ cos \ (\omega \ t)[1 \ + \ B \ \frac{sen \ (\omega \ t)}{cos \ (\omega \ t)}]} \ \Big) \ \Big] \ =$$

$$= \ [cos^2 \ (\omega \ t) \ + \ (A \ - \ \frac{1}{\omega^2 \ \tau^2}) \ sen^2 \ (\omega \ t) \ +$$

$$+ \ B \ sen \ (2 \ \omega \ t) \ + \ \frac{sen^2 \ (\omega \ t)}{\omega^2 \ \tau^2}]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{2} \ arctg\Big(\ \frac{tg \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau[1 \ + \ B \ tg \ (\omega \ t)]} \ \Big) \ \Big] \quad \rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{cos \ (\omega \ t) \ + \ B \ sen \ (\omega \ t) \ - \ \frac{i \ sen \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau}}} \ = \ [\mu(t)]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{2} \ arctg\Big(\ \frac{tg \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau[1 \ + \ B \ tg \ (\omega \ t)]} \ \Big) \ \Big] \ . \qquad (4.3.2.49)$$

Por fim, o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm do oscilador harmônico simples** será obtido substituindo-se a expressão (4.3.2.49) na expressão (4.3.2.48):

$$K(x, \ x_o, \ t) \ = \ [\mu(t)]^{1/4} \times [\mu(t)]^{- \ 1/4} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{2} \ arctg \ \Big(\ \frac{tg \ (\omega \ t)}{\omega \ \tau \ [1 \ + \ B \ tg \ \omega \ t)]} \ \Big) \ \Big] \ \times$$

$$\times \; exp \left[\; - \; \frac{i}{2} \; arctg \; \left(\; \frac{tg \; (\omega \; t)}{\omega \; \tau [1 \; + \; B \; tg \; (\omega \; t)]} \; \right) \; \right] \; \times$$

$$\times \; \left[\; \sqrt{\frac{m \; \omega}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)}} \; exp \; \left(\; \frac{i \; m \; \omega}{2 \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)} \; \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \; [(x^2 \; + \; x_o^2) \; cos \; (\omega \; t) \; - \; 2 \; x \; x_o] \; \right) \; \right] \; \rightarrow$$

$$K(x, \; x_o, \; t) \; = \; \sqrt{\frac{m \; \omega}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)}} \; \times$$

$$\times \; exp \; \left(\; \frac{i \; m \; \omega}{2 \; \hbar \; sen \; (\omega \; t)} \; \times \right.$$

$$\left. \times \; [(x^2 \; + \; x_o^2) \; cos \; (\omega \; t) \; - \; 2 \; x \; x_o] \; \right) \; , \qquad (4.3.2.50)$$

que coincide com o tradicional **propagador de Feynman do oscilador harmônico simples**.[2] Destaquemos que esse mesmo resultado é obtido quando se considera $\dot{a}(0) = 0$.[10]. Neste caso, usando-se as expressões (4.3.2.4d,22c,24), teremos:

$$\dot{a}(0) \; = \; b_o \; = \; 0 \quad \rightarrow \quad B \; = \; 0 \quad \rightarrow \quad \zeta \; = \; 0 \; . \qquad (4.3.2.51)$$

Contudo, apesar de o **propagador de Feynman** ser o mesmo para as duas situações [$\dot{a}(0) \neq 0$ e $\dot{a}(0) = 0$], os pacotes de onda correspondentes são diferentes, pois suas larguras, de acordo com as expressões (4.3.2.21a,51), valem, respectivamente:

$$a^2(t) \; = \; a_o^2 \; [cos^2 \; (\omega \; t) \; + \; (\frac{1 \; + \; \zeta^2}{\omega^2 \; \tau^2}) \; sen^2 \; (\omega \; t) \; +$$

$$+ \; \frac{\zeta}{\omega \; \tau} \; sen \; (2 \; \omega \; t)] \; , \qquad (4.3.2.52a)$$

$$a^2(t) \;=\; a_o^2\;[cos^2\;(\omega\;t)\;+\;\frac{sen^2\;(\omega\;t)}{\omega^2\;\tau^2}]\;. \qquad (4.3.2.52b)$$

4.3.3. Propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da Partícula em um Campo Externo Linear

Neste item, vamos calcular o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula em um campo externo linear** caracterizado pelo seguinte potencial:

$$V[X(t),\;t]\;=\;-\;f\;X(t)\;, \qquad (4.3.3.1)$$

onde f é uma constante.

Considerando-se as expressões (4.2.2.2-3) e usando-se a expressão acima, virá:

$$\ddot{X}(t)\;=\;\frac{f}{m}\;, \qquad \ddot{a}(t)\;=\;\frac{\hbar^2}{4\;m^2\;a^3(t)}\;. \qquad (4.3.3.2\text{-}3)$$

Para resolvermos as equações diferenciais indicadas acima, consideremos as seguintes condições iniciais [vide expressões (4.2.2.4a-d)]:

$$X(0)\;=\;x_o\;, \qquad \dot{X}(0)\;=\;v_o\;, \qquad (4.3.3.4a\text{-}b)$$

$$a(0)\;=\;a_o\;, \qquad \dot{a}(0)\;=\;b_o\;. \qquad (4.3.3.4c\text{-}d)$$

A solução da expressão (4.3.3.2) é imediata, ou seja:

$$X(t)\;=\;\frac{f\;t^2}{2\;m}\;+\;v_o\;t\;+\;x_o\;. \qquad (4.3.3.5)$$

Por sua vez, como a expressão (4.3.3.3) é idêntica à expressão (4.3.1.1c), sua solução será dada por [vide expressões (4.3.1.2a-b,d-e,h,3a-c)]:

$$a^2(t)\;=\;a_o^2\;\eta(t)\;, \qquad (4.3.3.6a)$$

$$\eta(t) \; = \; 1 \; + \; B \; t \; + \; C \; t^2 \; , \qquad (4.3.3.6b)$$

$$a_o^2 \; = \; \frac{\hbar^2}{4 \; m^2 \; I_1} \; + \; I_1 \; I_2^2 \; , \qquad (4.3.3.7a)$$

$$B \; = \; \frac{2 \; I_1 \; I_2}{a_o^2} \; , \qquad C \; = \; \frac{I_1}{a_o^2} \; , \qquad (4.3.3.7b\text{-}c)$$

$$\dot{a}(0) \; = \; b_o \; = \; a_o \; B/2 \; , \qquad (4.3.3.8)$$

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \; = \; \frac{B/2 \; + \; C \; t}{\eta(t)} \; , \qquad (4.3.3.9a)$$

$$\sqrt{\frac{a_o}{a(t)}} \; = \; \sqrt{\frac{a_o}{a_o \; \sqrt{\eta(t)}}} \; = \; [\eta(t)]^{- \; 1/4} \; , \qquad (4.3.3.9b\text{-}c)$$

onde I_1 e I_2 são os **invariantes de Ermakov-Lewis**.

Por outro lado, tomando-se a expressão (4.3.3.5), obteremos:

$$x \; - \; X(t) \; = \; (x \; - \; x_o \; - \; v_o \; t \; - \; \frac{f \; t^2}{2 \; m}) \; , \qquad (4.3.3.10a)$$

$$[x \; - \; X(t)]^2 \; = \; (x \; - \; x_o \; - \; v_o \; t \; - \; \frac{f \; t^2}{2 \; m})^2 \; =$$

$$= \; (x \; - \; x_o)^2 \; + \; v_o^2 \; t^2 \; + \; \frac{f^2 \; t^4}{4 \; m^2} \; - \; 2 \; (x \; - \; x_o) \; v_o \; t \; -$$

$$- \; 2 \; (x \; - \; x_o) \; \frac{f \; t^2}{2 \; m} \; + \; 2 \; v_o \; t \; \frac{f \; t^2}{2 \; m} \; \rightarrow$$

$$[x \; - \; X(t)]^2 \; = \; [(x \; - \; x_o)^2 \; - \; (x \; - \; x_o) \; \frac{f \; t^2}{m} \; + \; \frac{f^2 \; t^4}{4 \; m^2}] \; +$$

$$+ \; [\frac{f \; t^3}{m} \; - \; 2 \; (x \; - \; x_o) \; t] \; v_o \; + \; t^2 \; v_o^2 \; , \qquad (4.3.3.10b)$$

$$\dot{X}(t) \; = \; \frac{f \; t}{m} \; + \; v_o \; . \qquad (4.3.3.10c)$$

Assim, tomando-se a expressão (4.2.2.13) e substituindo-se nela as expressões (4.3.3.1,6a-b,9a-c,10a-c), o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula em um campo externo linear** tomará a seguinte forma:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \Big(\ \frac{i\ m}{2\ \hbar}\ [\frac{B/2\ +\ C\ t}{\eta(t)}]\ -\ \frac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}\ \Big)\ \times$$

$$\times\ \Big(\ [(x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ \frac{f\ t^2}{m}\ +\ \frac{f^2\ t^4}{4\ m^2}]\ +$$

$$+\ [\frac{f\ t^3}{m}\ -\ 2\ (x\ -\ x_o)\ t]\ v_o\ +\ t^2\ v_o^2\ \Big)\ \Big]\ \times$$

$$\times\ exp\ [\ \frac{i\ m}{\hbar}\ (\frac{f\ t}{m}\ +\ v_o)\ (x\ -\ x_o\ -\ v_o\ t\ -\ \frac{f\ t^2}{2\ m})]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \frac{i}{\hbar}\ \int_o^t dt'\ [\ \frac{1}{2}\ m\ (\frac{f\ t'}{m}\ +\ v_o)^2\ +$$

$$+\ f\ (\frac{f\ t'^2}{2\ m}\ +\ v_o\ t'\ +\ x_o)\ -\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}]\ \Big)\ . \qquad (4.3.3.11)$$

Considerando-se que a integral indicada na expressão (4.3.3.11) é realizada no espaço dos v_o, vamos preparar o seu integrando envolvendo potências dessa variável de integração para que possamos utilizar a expressão (4.3.1.6), ou seja:

$$\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ e^{(-\ D\ v_o^2\ +\ E\ v_o)}\ =\ \sqrt{\frac{\pi}{D}}\ e^{\frac{E^2}{4\ D}}\ . \qquad (4.3.3.12)$$

Para determinarmos os valores de D e E da expressão acima, vamos trabalhar com as exponenciais indicadas na expressão (4.3.3.11). Desse modo, teremos:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ EXP1 \times EXP2 \times EXP3\ , \qquad (4.3.3.13)$$

com:

$$EXP1\ =\ exp\ \Big[\ \Big(\ \tfrac{i\ m}{2\ \hbar}\ [\tfrac{B/2\ +\ C\ t}{\eta(t)}]\ -\ \tfrac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}\ \Big) \times$$

$$\times\ \Big(\ [(x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ \tfrac{f\ t^2}{m}\ +\ \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2}]\ v_o^0\ +$$

$$+\ [\tfrac{f\ t^3}{m}\ -\ 2\ (x\ -\ x_o)\ t]\ v_o^1\ +\ t^2\ v_o^2\ \Big)\ \Big]\ \ \rightarrow$$

$$EXP1\ =\ exp\Big(\ F(t)\ [(x - x_o)^2 - (x - x_o)\ \tfrac{f\ t^2}{m} + \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2}]\Big)\ v_o^0 \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ F(t)\ [\tfrac{f\ t^3}{m}\ -\ 2\ (x\ -\ x_o)\ t]\ \Big)\ v_o^1\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ F(t)\ t^2\ \Big)\ v_o^2\ , \qquad (4.3.3.14a)$$

onde (lembrar que $i\ i\ =\ -\ 1$):

$$F(t)\ =\ [\tfrac{i\ m\ B}{4\ \hbar\ \eta(t)}\ +\ \tfrac{i\ m\ C\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ -\ \tfrac{1}{4\ a_o^2\ \eta(t)}]\ \ \rightarrow$$

$$F(t)\ =\ \tfrac{i\ m}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ (\tfrac{B}{2}\ +\ C\ t\ +\ \tfrac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2})\ , \qquad (4.3.3.14b)$$

$$EXP2\ =\ exp\ [\tfrac{i\ m}{\hbar}\ (\tfrac{f\ t}{m}\ +\ v_o)\ (x\ -\ x_o\ -\ v_o\ t\ -\ \tfrac{f\ t^2}{2\ m})] =$$

$$= exp\ \Big(\ \tfrac{i\ m}{\hbar}\ [(x\ -\ x_o)\ \tfrac{f\ t}{m}\ -\ \tfrac{f\ t^2}{m}\ v_o\ -\ \tfrac{f^2\ t^3}{2\ m^2}\ +$$

$$+\ (x\ -\ x_o)\ v_o\ -\ v_o^2\ t\ -\ \tfrac{f\ t^2}{2\ m}\ v_o]\ \Big)\ \ \rightarrow$$

$$EXP2\ =\ exp\ \Big(\ \tfrac{i\ m}{\hbar}\ [(x\ -\ x_o)\ \tfrac{f\ t}{m}\ -\ \tfrac{f^2\ t^3}{2\ m^2}]\ \Big)\ v_o^0\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \tfrac{i\ m}{\hbar}\ [(x\ -\ x_o)\ -\ \tfrac{3\ f\ t^2}{2\ m}]\ \Big)\ v_o^1\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ -\ \tfrac{i\ m\ t}{\hbar}\ \Big)\ v_o^2\ , \qquad (4.3.3.15)$$

$$EXP3\ =\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ \int_o^t dt'\ [\tfrac{1}{2}\ m\ (\tfrac{f\ t'}{m}\ +\ v_o)^2\ +$$

$$+\ f\ (\tfrac{f\ t'^2}{2\ m}\ +\ v_o\ t'\ +\ x_o)\ -\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}]\ \Big)\ =$$

$$=\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ \int_o^t dt'\ [\tfrac{f^2\ t'^2}{2\ m}\ +\ f\ t'\ v_o\ +$$

$$+\ \tfrac{m\ v_o^2}{2}\ +\ \tfrac{f^2\ t'^2}{2\ m}\ +\ f\ v_o\ t'\ +\ f\ x_o\ -\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}]\ \Big)\ =$$

$$=\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ \int_o^t dt'\ [\tfrac{f^2\ t'^2}{m}\ +\ 2\ f\ v_o\ t'\ +\ \tfrac{m\ v_o^2}{2}\ +\ f\ x_o\ -$$

$$-\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}]\Big)\ =\ exp\,[\tfrac{i}{\hbar}\ (\tfrac{f^2\ t^3}{3\ m} + f\ t^2\ v_o + \tfrac{m\ v_o^2\ t}{2} + f\ x_o\ t)]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ \int_o^t dt'\ [-\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}]\ \Big)\ \ \rightarrow$$

$$EXP3\ =\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ [\tfrac{f^2\ t^3}{3\ m}\ +\ f\ t\ x_o]\ \Big)\ v_o^0\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \tfrac{i\ f\ t^2}{\hbar}\ \Big)\ v_o^1\ \times\ exp\ \Big(\ \tfrac{i\ m\ t}{2\ \hbar}\ \Big)\ v_o^2\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ \int_o^t dt'\ [-\ \tfrac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2\ \eta(t')}]\ \Big)\ . \qquad (4.3.3.16a)$$

Para efetuarmos a integral indicada na expressão acima, usaremos as expressões (4.3.1.11,13). Desse modo, a expressão acima ficará:

$$EXP3\ =\ exp\ \Big(\ \tfrac{i}{\hbar}\ [\tfrac{f^2\ t^3}{3\ m}\ +\ f\ t\ x_o]\ -$$

$$- \frac{i\ \hbar}{4\ m\ a_o^2}\ \frac{2}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\ \Big)\ v_o^0\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \frac{i\ f\ t^2}{\hbar}\ \Big)\ v_o^1\ \times\ exp\ \Big(\ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar}\ \Big)\ v_o^2\ . \qquad (4.3.3.16b)$$

A fim de que possamos usar a expressão (4.3.3.12), vamos agrupar as potências de v_o nos argumentos das $EXP1-3$ [vide expressões (4.3.3.14a-b,15,16b)]. Desse modo, usando-se a expressão (4.3.3.6b), teremos:

$$v_o^0\ \Big(\ F(t)\ [(x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ \frac{f\ t^2}{m}\ +\ \frac{f^2\ t^4}{4\ m^2}]\ +$$

$$+\ \frac{i\ m}{\hbar}\ [(x\ -\ x_o)\ \frac{f\ t}{m}\ -\ \frac{f^2\ t^3}{2\ m^2}]\ +\ \frac{i}{\hbar}\ [\frac{f^2\ t^3}{3\ m}\ +\ f\ t\ x_o]\ -$$

$$-\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\ \Big)\ =$$

$$=\ v_o^0\ \Big(\ F(t)\ (x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ [F(t)\ \frac{f\ t^2}{m}\ -$$

$$-\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}]\ +\ F(t)\ \frac{f^2\ t^4}{4\ m^2}\ -\ \frac{i\ f^2\ t^3}{2\ \hbar\ m}\ +\ \frac{i\ f^2\ t^3}{3\ \hbar\ m}\ +$$

$$+\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}\ x_o\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\Big)\ \ \rightarrow$$

$$v_o^0\ \Big(\ F(t)\ (x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ [F(t)\ \frac{f\ t^2}{m}\ -\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}]\ +$$

$$+\ \frac{f^2\ t^3}{2\ m}\ [\frac{F(t)\ t}{2\ m}\ -\ \frac{i}{3\ \hbar}]\ +\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}\ x_o\ -$$

$$-\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\Big)\ , \qquad (4.3.3.17)$$

$$v_o^1\ \Big(\ F(t)\ [\frac{f\ t^3}{m}\ -\ 2\ (x\ -\ x_o)\ t]\ +\ \frac{i\ m}{\hbar}\ [(x\ -\ x_o)\ -$$

$$- \frac{3\ f\ t^2}{2\ m}] \ + \ \frac{i\ f\ t^2}{\hbar} \Big) \ = \ v_o^1 \Big(\ (x - \ x_o) \ [\frac{i\ m}{\hbar} \ - \ 2\ F(t)\ t] \ +$$

$$+ \ F(t)\ \frac{f\ t^3}{m} \ - \ \frac{i\ 3\ f\ t^2}{2\ \hbar} \ + \ \frac{i\ f\ t^2}{\hbar}\Big) \ =$$

$$= \ v_o^1 \Big(\ (x \ - \ x_o) \ [\frac{i\ m}{\hbar} \ - \ \frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)} \ (\frac{B}{2} \ + \ C\ t \ + \ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2})\ t] \ +$$

$$+ \ F(t)\ \frac{f\ t^3}{m} \ - \ \frac{i\ f\ t^2}{2\ \hbar} \ \Big) \ =$$

$$= \ v_o^1 \Big(\ \frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)} \ (x \ - \ x_o) \ [\eta(t) \ - \ \frac{B\ t}{2} \ - \ C\ t^2 \ - \ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}] \ +$$

$$+ \ F(t)\ \frac{f\ t^3}{m} \ - \ \frac{i\ f\ t^2}{2\ \hbar} \ \Big) \ =$$

$$= \ v_o^1 \Big(\ \frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)} \ (x \ - \ x_o) \ [1 \ + \ B\ t \ + \ C\ t^2 \ - \ \frac{B\ t}{2} \ - \ C\ t^2 \ -$$

$$- \ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}] \ + \ F(t)\ \frac{f\ t^3}{m} \ - \ \frac{i\ f\ t^2}{2\ \hbar} \ \Big) \ =$$

$$= \ v_o^1 \Big(\ \frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)} \ (x \ - \ x_o) \ [1 \ + \ \frac{B\ t}{2} \ - \ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}] \ +$$

$$+ \ F(t)\ \frac{f\ t^3}{m} \ - \ \frac{i\ f\ t^2}{2\ \hbar} \ \Big) \ \to \ v_o^1 \Big(\ \frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)} \ (x \ - \ x_o) \ G(t) \ +$$

$$+ \ f\ t^2 \ [\frac{F(t)\ t}{m} \ - \ \frac{i}{2\ \hbar}] \ \Big) \ , \qquad (4.3.3.18a)$$

com:

$$G(t) \ = \ 1 \ + \ \frac{B\ t}{2} \ - \ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2} \ , \qquad (4.3.3.18b)$$

$$v_o^2 \Big(\ F(t)\ t^2 \ - \ \frac{i\ m\ t}{\hbar} \ + \ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar} \ \Big) \ = \ v_o^2 \Big(\ F(t)\ t^2 \ - \ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar} \ \Big) \ =$$

$$= v_o^2 \left(\frac{i\ m}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ (\frac{B}{2}\ +\ C\ t\ +\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2})\ t^2\ -\ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar} \right)\ =$$

$$= v_o^2 \left(\frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ [\frac{B\ t}{2}\ +\ C\ t^2\ +\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ -\ \eta(t)] \right)\ =$$

$$= v_o^2 \left(\frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ [\frac{B\ t}{2}\ +\ C\ t^2\ +\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ -\ 1\ -\ B\ t\ -\ C\ t^2] \right)\ =$$

$$= v_o^2 \left(\frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ [-\ 1\ -\ \frac{B\ t}{2}\ +\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}] \right)\ \to$$

$$v_o^2 \left(\ -\ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ G(t) \right)\ . \qquad (4.3.3.19)$$

Levando-se as expressões (4.3.3.17,18a,19) na expressão (4.3.3.13), e usando-se a expressão (4.3.3.12), virá:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp \left(\ F(t)\ (x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ [F(t)\ \frac{f\ t^2}{m}\ -\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}]\ +\right.$$

$$+\ \frac{f^2\ t^3}{2\ m}\ [\frac{F(t)\ t}{2\ m}\ -\ \frac{i}{3\ \hbar}]\ +\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}\ x_o\ -$$

$$\left. -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t}) \right)\ \times$$

$$\times\ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} dv_o\ exp \left(\ -\ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ G(t)\ v_o^2 \right)\ \times$$

$$\times\ exp \left[\left(\frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)}\ (x\ -\ x_o)\ G(t)\ +\ f\ t^2\ [\frac{F(t)\ t}{m}\ -\ \frac{i}{2\ \hbar}] \right) v_o \right]\ \to$$

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp \left(\ F(t)\ (x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ [F(t)\ \frac{f\ t^2}{m}\ -\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}]\ +\right.$$

$$+ \frac{f^2\ t^3}{2\ m}\ [\frac{F(t)\ t}{2\ m}\ -\ \frac{i}{3\ \hbar}]\ +\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}\ x_o\ -$$

$$-\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\Big)\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{\pi}{\frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ G(t)}}\ exp\ \Big[\ \frac{\Big(\ \frac{i\ m}{\hbar\ \eta(t)}\ (x\ -\ x_o)\ G(t)\ +\ f\ t^2\ [\frac{F(t)\ t}{m}\ -\ \frac{i}{2\ \hbar}]\ \Big)^2}{4\ \frac{i\ m\ t}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ G(t)}\ \Big]\ \rightarrow$$

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ \frac{m}{2\ \pi\ \hbar}\ [\eta(t)]^{-\ 1/4}\ \times\ [\eta(t)]^{1/2}\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{2\ \hbar\ \pi}{i\ m\ t}}\ \times\ \sqrt{\frac{1}{G(t)}}\ \times\ exp\ \Big(\ F(t)\ (x\ -\ x_o)^2\ -\ (x\ -\ x_o)\ \times$$

$$\times\ F(t)\ \frac{f\ t^2}{m}\ -\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}]\ +\ \frac{f^2\ t^3}{2\ m}\ [\frac{F(t)\ t}{2\ m}\ -\ \frac{i}{3\ \hbar}]\ +$$

$$+\ \frac{i\ f\ t}{\hbar}\ x_o\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\Big)\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{\hbar\ \eta(t)\ \Big(\ -\ \frac{m^2}{\hbar^2\ \eta^2(t)}\ (x\ -\ x_o)^2\ G^2(t)\ +\ f^2\ t^4\ [\frac{F(t)\ t}{m}\ -\ \frac{i}{2\ \hbar}]^2\ \Big)}{2\ i\ m\ t\ G(t)}\ \Big]\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{\hbar\ \eta(t)}{2\ i\ m\ t\ G(t)}\ \times$$

$$\times\ \Big(\ \frac{2\ i\ m}{\hbar\ \eta(t)}\ (x\ -\ x_o)\ G(t)\ f\ t^2\ [\frac{F(t)\ t}{m}\ -\ \frac{i}{2\ \hbar}]\ \Big)\ \Big]\ . \qquad (4.3.3.20)$$

Antes de reduzirmos os termos semelhantes nos argumentos das exponenciais indicadas na expressão (4.3.3.20), vamos escrever $G(t)$ em função de $F(t)$. Assim, partindo-se da expressão (4.3.3.14b) e usando-se as expressões (4.3.3.6b,18b), teremos:

$$\frac{2\ \hbar\ \eta(t)\ F(t)\ t}{i\ m}\ =\ \frac{B\ t}{2}\ +\ C\ t^2\ +\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\ \ \rightarrow$$

$$- \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2} \ = \ \frac{2\ i\ \hbar\ \eta(t)\ F(t)\ t}{m} \ + \ \frac{B\ t}{2} \ + \ C\ t^2 \quad \rightarrow$$

$$G(t) \ = \ 1 \ + \ \frac{B\ t}{2} \ - \ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2} \ =$$

$$= \ 1 \ + \ \frac{B\ t}{2} \ + \ \frac{2\ i\ \hbar\ \eta(t)\ F(t)\ t}{m} \ + \ \frac{B\ t}{2} \ + \ C\ t^2 \ =$$

$$= \ 1 \ + \ B\ t \ + \ C\ t^2 \ + \ \frac{2\ i\ \hbar\ \eta(t)\ F(t)\ t}{m} \ =$$

$$= \ \eta(t) \ + \ \frac{2\ i\ \hbar\ \eta(t)\ F(t)\ t}{m} \quad \rightarrow$$

$$G(t) \ = \ \eta(t)\ [1 \ + \ \frac{2\ i\ \hbar\ F(t)\ t}{m}]\ . \qquad (4.3.3.21)$$

Portanto, reduzindo-se os termos semelhantes nos argumentos das exponenciais indicadas na expressão (4.3.3.20) e usando-se as expressões (4.3.3.6b,14b,18b,21), resultará:

$$ARGEXP(x \ - \ x_o)^2 \ = \ [F(t) - \ \frac{\hbar\ \eta(t)\ m^2\ G^2(t)}{\hbar^2\ \eta^2(t)\ 2\ i\ m\ t\ G(t)}] \ =$$

$$= \ [F(t) \ + \ \frac{i\ m\ G(t)}{2\ \hbar\ \eta(t)\ t}] \ =$$

$$= \ [\frac{i\ m}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ (\frac{B}{2} \ + \ C\ t \ + \ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}) \ + \ \frac{i\ m\ G(t)}{2\ \hbar\ \eta(t)\ t}] \ =$$

$$= \left(\frac{i\ m}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ [\frac{B}{2} \ + \ C\ t \ + \ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2} \ + \ \frac{1}{t}\ (1 \ + \ \frac{B\ t}{2} \ - \ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})]\right) =$$

$$= \ [\frac{i\ m}{2\ \hbar\ \eta(t)}\ (\frac{B}{2} \ + \ C\ t \ + \ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2} \ + \ \frac{1}{t} \ + \ \frac{B}{2} \ - \ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2})] \ =$$

$$= \ [\frac{i\ m}{2\ \hbar\ \eta(t)\ t}\ (1 \ + \ B\ t \ + \ C\ t^2)] \ = \ \frac{i\ m\ \eta(t)}{2\ \hbar\ \eta(t)\ t} \quad \rightarrow$$

$$ARGEXP(x \ - \ x_o)^2 \ = \ \frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\ , \qquad (4.3.3.22)$$

$$ARGEXP(x - x_o)^1 = \Big(- F(t) \tfrac{f\ t^2}{m} + \tfrac{i\ f\ t}{\hbar} +$$

$$+ \tfrac{2\ i\ m\ f\ t^2}{2\ i\ m\ t\ G(t)}\ G(t)\ [\tfrac{F(t)\ t}{m} - \tfrac{i}{2\ \hbar}] \Big) =$$

$$= [- F(t) \tfrac{f\ t^2}{m} + \tfrac{i\ f\ t}{\hbar} + F(t) \tfrac{f\ t^2}{m} - \tfrac{i\ f\ t}{2\ \hbar}] \quad \rightarrow$$

$$ARGEXP(x - x_o)^1 = \tfrac{i\ f\ t}{2\ \hbar}\ , \qquad (4.3.3.23)$$

$$ARGEXP(x - x_o)^0 = \Big(F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{6\ \hbar\ m} +$$

$$+ \tfrac{\hbar\ \eta(t)}{2\ i\ m\ t\ G(t)}\ f^2\ t^4\ [\tfrac{F(t)\ t}{m} - \tfrac{i}{2\ \hbar}]^2 \Big) = \Big(F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{6\ \hbar\ m} +$$

$$+ \tfrac{\hbar\ \eta(t)}{2\ i\ m\ t\ G(t)}\ f^2\ t^4\ (- \tfrac{i}{2\ \hbar})^2\ [1 + \tfrac{2\ i\ \hbar\ F(t)\ t}{m}]^2 \Big) =$$

$$= \Big(F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{6\ \hbar\ m} + \tfrac{i\ \eta(t)\ f^2\ t^3}{8\ \hbar\ m\ G(t)}\ [\tfrac{G(t)}{\eta(t)}]^2 \Big) =$$

$$= \Big(F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{6\ \hbar\ m} + \tfrac{i\ f^2\ t^3}{8\ \hbar\ m}\ \tfrac{G(t)}{\eta(t)} \Big) =$$

$$= \Big(F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{6\ \hbar\ m} + \tfrac{i\ f^2\ t^3}{8\ \hbar\ m}\ [1 + \tfrac{2\ i\ \hbar\ F(t)\ t}{m} \Big) =$$

$$= \Big(F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{6\ \hbar\ m} + \tfrac{i\ f^2\ t^3}{8\ \hbar\ m} - F(t) \tfrac{f^2\ t^4}{4\ m^2} \Big) =$$

$$= \tfrac{- 4\ i\ f^2\ t^3 + 3\ i\ f^2\ t^3}{24\ \hbar\ m} \quad \rightarrow$$

$$ARGEXP(x - x_o)^0 = - \tfrac{i\ f^2\ t^3}{24\ \hbar\ m}\ . \qquad (4.3.3.24)$$

Tomando-se a expressão (4.3.3.20) e levando-se nela as expressões (4.3.3.22-24), e usando-se as expressões (4.3.1.20) e (4.3.3.6b,18b), obteremos:

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ [\eta(t)]^{1/4}\ \times$$

$$\times\ \sqrt{\frac{1}{1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}}}\ \times\ \sqrt{\frac{m^2}{(2\ \pi\ \hbar)^2}}\ \times\ \sqrt{\frac{2\ \pi\ \hbar}{i\ m\ t}}\ \times$$

$$\times\, exp\left(\frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\,(x-x_o)^2+\frac{i\ f\ t}{2\ \hbar}\,(x-x_o)+\frac{i\ f\ t}{\hbar}\,x_o-\frac{i\ f^2\ t^3}{24\ \hbar\ m}\right)\times$$

$$\times\ exp\left(\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\right)\ =$$

$$=\ [\eta(t)]^{1/4}\ \times\left(1\ +\ \frac{B\ t}{2}\ -\ \frac{i\ \hbar\ t}{2\ m\ a_o^2}\right)^{-\ 1/2}\times\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ t}}\ \times$$

$$\times\, exp\left(\frac{i\ m}{2\ \hbar\ t}\,(x-x_o)^2+\frac{i\ f\ t}{2\ \hbar}\,(x-x_o)+\frac{i\ f\ t}{\hbar}\,x_o-\frac{i\ f^2\ t^3}{24\ \hbar\ m}\right)\times$$

$$\times\ exp\left(\ -\ \frac{i\ \hbar}{2\ m\ a_o^2}\ \frac{1}{\sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ (\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t})\right)\ \ \rightarrow$$

$$K(x,\ x_o,\ t)\ =\ (1\ +\ B\ t\ +\ C\ t^2)^{1/4}\ \times$$

$$\times\ [(1\ +\ \frac{B\ t}{2})^2\ +\ (\frac{\hbar\ t}{2\ m\ a_o^2})^2]^{-\ 1/4}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i}{2}\ \Big(\ arctg\ [\frac{\hbar\ t/(2\ m\ a_o^2)}{1\ +\ B\ t/2}]\ -$$

$$-\ \frac{\hbar}{m\ a_o^2\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}\ arctg\ [\frac{t\ \sqrt{4\ C\ -\ B^2}}{2\ +\ B\ t}]\ \Big)\ \Big]\ \times\ \Bigg[\ \sqrt{\frac{m}{2\ \pi\ i\ t}}\ \times$$

$$\times\ exp\ \Big(\ \frac{i}{\hbar}\ \Big[\ \frac{m}{2\ t}\ (x\ -\ x_o)^2\ +$$

$$+\ \frac{f\ t}{2}\ (x\ +\ x_o)\ -\ \frac{f^2\ t^3}{24\ m}\ \Big]\ \Big)\ \Bigg]\ .\quad (4.3.3.25)$$

Para obtermos o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula em um campo externo linear**, vamos impor que [vide expressões (4.3.1.22-23)]:

$$(1 + B\,t + C\,t^2)^{1/4} \times [(1 + \frac{B\,t}{2})^2 + (\frac{\hbar\,t}{2\,m\,a_o^2})^2]^{-\,1/4} = 1 \;\rightarrow$$

$$C = (\frac{B}{2})^2 + (\frac{\hbar}{2\,m\,a_o^2})^2\,. \qquad (4.3.3.26\text{a-b})$$

Usando-se a expressão (4.3.3.26b), resultará [vide expressão (4.3.1.24):

$$arctg\,[\frac{\hbar\,t/(2\,m\,a_o^2)}{1 + B\,t/2}] -$$

$$- \frac{\hbar}{m\,a_o^2\,\sqrt{4\,C - B^2}}\,arctg\,[\frac{t\,\sqrt{4\,C - B^2}}{2 + B\,t}] = 0\,. \qquad (4.3.3.27)$$

Por fim, levando-se as expressões (4.3.3.26a,27) na expressão (4.3.3.25), obteremos o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm da partícula em um campo externo linear**:

$$K(x,\,x_o,\,t) = \sqrt{\frac{m}{2\,\pi\,i\,t}}\,exp\,\Big(\,\frac{i}{\hbar}\,\Big[\,\frac{m}{2\,t}\,(x - x_o)^2 +$$

$$+ \frac{f\,t}{2}\,(x + x_o) - \frac{f^2\,t^3}{24\,m}\,\Big]\,\Big)\,, \qquad (4.3.3.28)$$

que coincide com o tradicional **propagador de Feynman da partícula em um campo externo linear**.[2]

É oportuno destacar que esse mesmo resultado é obtido quando se considera [vide expressão (4.3.3.4d)]:

$$\dot{a}(0) = b_o = 0\,, \qquad (4.3.3.29)$$

pois, levando-se esse resultado na expressão (4.3.3.8) e usando-se as expressões (4.3.1.27a-b), virá (lembrar que $a_o \neq 0$):

$$\dot{a}(0) \; = \; b_o \; = \; 0 \; = \; a_o \; B/2 \quad \rightarrow$$

$$B \; = \; 0 \; , \qquad C \; = \; (\tfrac{\hbar}{2 \; m \; a_o^2})^2 \qquad (4.3.3.30a\text{-}b)$$

e, com isso, as expressões (4.3.3.26a,27) são preservadas.[11]

Contudo, apesar de o **propagador de Feynman** ser o mesmo para as duas situações [$\dot{a}(0) \neq 0$ e $\dot{a}(0) = 0$], os pacotes de onda correspondentes são diferentes, pois suas larguras valem, respectivamente [vide expressões (3.2.2.23b) e (3.3.3.27)]:

$$a_{acoplado}^2(t) \; = \; a_o^2 \; [\; 1 + \; \tfrac{2 \; \zeta}{\tau} \; t \; + \; \tfrac{(1 \; + \; \zeta^2)}{\tau^2} \; t^2 \;] \; , \qquad (4.3.3.31)$$

$$a^2(t) \; = \; a_o^2 \; [\; 1 + \; \tfrac{t^2}{\tau^2}] \; , \qquad (4.3.3.32)$$

onde [vide expressões (3.2.2.23a) e (3.3.3.25b)]:

$$\tau \; = \; \tfrac{2 \; m \; a_o^2}{\hbar} \; , \qquad \zeta \; = \; \tfrac{B}{2} \; \tau \; . \qquad (4.3.3.33a\text{-}b)$$

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. FEYNMAN, R. P. 1948. *Reviews of Modern Physics 20*, 367.
2. FEYNMAN, R. P. and HIBBS, A. R. 1965. **Quantum Mechanics and Path Integrals**. McGraw-Hill Book Company.
3. BERNSTEIN, I. B. 1985. *Physical Review A 32*, 1.

4. Observe-se que o **propagador de Feynman-de Broglie-Bohm** para descrever sistemas não-conservativos descritos por uma equação do tipo de Navier-Stokes mostrada abaixo:

$$\tfrac{\partial v_{qu}}{\partial t} \; + \; v_{qu} \; \tfrac{\partial v_{qu}}{\partial x} \; + \; \lambda \; v_{qu} \; +$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (V + V_{qu}) = 0 , \qquad (4.2.2.14)$$

é dado por (vide NASSAR, A. B., BASSALO, J. M. F., ALENCAR, P. T. S., CANCELA, L. S. G. e CATTANI, M. 1997. *Physical Review E56*, 1230):

$$K(x, x_o, t) = \frac{m}{2 \pi \hbar} \int_{- \infty}^{+ \infty} dv_o \sqrt{\frac{a_o}{a(t)}} \times$$

$$\times exp\Big[\Big(\frac{i m \dot{a}(t)}{2 \hbar a(t)} - \frac{1}{4 a^2(t)} \Big) [x - X(t)]^2 \Big] \times$$

$$\times exp \Big(\frac{i m \dot{X}(t)}{\hbar} [x - X(t)] \Big) \times exp \Big[\frac{i}{\hbar} e^{- \lambda t} \int_o^t dt' \times$$

$$\times e^{\lambda t'} \Big(\frac{1}{2} m \dot{X}^2(t') - V[X(t')] -$$

$$- \frac{\hbar^2}{4 m a^2(t')} \Big) \Big] , \qquad (4.2.2.15)$$

onde $X(t)$ e $a(t)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais:

$$\ddot{X}(t) + \lambda \dot{X}(t) = - \frac{1}{m} V'[X(t), t] , \qquad (4.2.2.16)$$

$$\ddot{a}(t) + \lambda \dot{a}(t) + \Big(\frac{1}{m} V''[X(t), t] \Big) a(t) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4 m^2 a^3(t)} . \qquad (4.2.2.17)$$

5. GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. W. 1965. **Table of Integrals, Series and Products**. Academic Press.

6. LOPES, J. L. M. 1999. **Acoplamento de Invariantes na Partícula Livre Via Formulação Quanto-Hidrodinâmica de de Broglie-Bohm**. *Tese de Mestrado*, DFUFPA.

7. SYMON, K. R. 1961. **Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

8. NASSAR, A. B. 1999. **Quantum Potential and Propagator at Caustics**. DFUFPA (mimeo).

9. É oportuno observar que esse procedimento é ainda válido quando ω depende do tempo. Veja-se: SOUZA, J. F. de 1999. **Aproximação de de Broglie-Bohm para Osciladores Harmônicos Dependentes do Tempo**. *Tese de Mestrado*, DFUFPA (mimeo).

10. MAGNO, F. N. B. 1999. **Cálculo do Propagador de Feynman do Oscilador Harmônico pela Expansão da Função de Onda**. *Tese de Mestrado*, DFUFPA (mimeo).

11. OLIVEIRA, J. I. F. de 2000. **O Propagador de Feynman do Potencial Linear via Expansão da Função de Onda**. DFUFPA (mimeo).

CAPÍTULO 5

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

E O TUNELAMENTO QUÂNTICO

5.1. Introdução

Em 1896, o físico francês Antoine Henry Becquerel (1852-1908; PNF, 1903) descobriu o fenômeno da **radioatividade**[1] ao observar que cristais de dissulfato de urânio-potássio eram capazes de impressionar uma chapa fotográfica mesmo quando recoberta com papel escuro, estando o conjunto exposto à luz solar. Logo depois, em 1897, o físico inglês Lord Ernest Rutherford (1871-1937; PNQ, 1908) descobriu que os "raios de Becquerel" eram constituídos de dois tipos de partículas: **alfa** (α), carregadas positivamente, e **beta** (β), negativamente. Mais tarde, em 1908, Rutherford e o físico alemão Hans Wilhelm Geiger (1882-1945) demonstraram que as partículas α eram átomos de hélio, e que apresentavam a carga elétrica igual a duas vezes a carga do elétron. Para justificar essa carga elétrica, Rutherford afirmou, em 1914, que a partícula α era constituída de quatro elétrons positivos (conhecidos como **partículas H**) e dois elétrons negativos. Em 1921, o físico inglês Charles Galton Darwin (1887-1962) apresentou três modelos para a partícula α: esfera dura carregada; disco duro carregado; núcleo na forma de um quadrado com um próton em cada vértice e dois elétrons no centro do quadrado.[2]

Desde a descoberta da **radioatividade** houve várias tentativas no sentido de explicá-la. Por exemplo, em 1911, Rutherford achava que sua origem poderia ser interna ao átomo, porém, não descartou a possibilidade de ela originar-se do exterior. Por sua vez, em 1920, H. Th. Wolff afirmou que esse

tipo de radiação estava associado ao mecanismo de "desordem interna" (flutuações) do material radioativo provocado por partículas externas altamente velozes. Contudo, somente em 1928 esse fenômeno físico foi explicado como sendo devido a um processo de **tunelamento quântico**. Com efeito, nesse ano, os físicos, o russo-norte-americano George Gamow (1904-1968) e, independentemente, o inglês Ronald Wilfrid Gurney (1898-1953) e o norte-americano Edward Uhler Condon (1902-1974) mostraram, usando a **equação de Schrödinger**, que uma partícula em frente de uma barreira de potencial, com energia menor que a altura da barreira, apresentava uma probabilidade - conhecida desde então como **efeito túnel** - de atravessar a barreira. Com essa idéia, eles conseguiram estimar a vida-média dos elementos radioativos, emissores de partículas α, calculando a probabilidade de essa partícula "atravessar" a barreira de potencial que o prende no interior do núcleo radioativo.[3]

Neste Capítulo, estudaremos o **tunelamento quântico** de uma partícula livre que se desloca em um meio dissipativo usando a Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$).[4] Inicialmente, trataremos desse tunelamento, em um meio conservativo, por intermédio da Mecânica Quântica de Schrödinger (MQS) e daquela Mecânica para, no final, compararmos os resultados. É oportuno esclarecer que existe uma diferença fundamental entre esses dois tratamentos. Enquanto na MQS, a **função de onda** (ψ) e **suas derivadas** ($\frac{\partial \psi}{\partial x}$) devem ser contínuas nas fronteiras da barreira de potencial, na $MQBB$ essa continuidade é exigida para as densidades de massa, de momento e de energia, conceitos físicos definidos quando apresentamos a $MQBB$ no Capítulo 1.

5.2. Tunelamento Quântico em Sistemas Conservativos

Neste item, estudaremos o **tunelamento quântico em sistemas conservativos** utilizando-se a Mecânica Quântica de Schrödinger (MQS) e a Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$). Além do mais, consideraremos apenas os sistemas conservativos representados pela **equação de Schrödinger linear**.

5.2.1. Tunelamento Quântico Conservativo Via Mecânica Quântica de Schrödinger

Seja a **equação de Schrödinger linear** definida pela expressão (1.2.1.1), isto é:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\partial^2\,\psi(x,\,t)}{\partial x^2}\;+$$

$$+\;V(x,\,t)\;\psi(x,\,t)\;. \qquad (5.2.1.1)$$

Consideremos um fluxo estacionário de partículas com energia incidente E, colidindo com uma barreira de potencial de altura V e de largura L:

$$V(x,\,t)\;=\;V\;, \qquad 0\;<x\;<\;L, \qquad (5.2.1.2a)$$

$$V(x,\,t)\;=\;0\;, \qquad x\neq 0,\;L\;, \qquad (5.2.1.2b)$$

e que definem as seguintes regiões:

Região (1) de Incidência: $x\;<\;0, \qquad (5.2.1.2c)$

Região (2) de Tunelamento: $0\;<\;x\;<\;L, \qquad (5.2.1.2d)$

Região (3) de Transmissão: $x\;>\;L. \qquad (5.2.1.2e)$

Assim, a solução da **equação de Schrödinger** [vide expressão (5.2.1.1)] para as três regiões definidas acima, é dada por:[5]

$$\psi_1(x,\ t)\ =\ (e^{i\ k\ x}\ +\ A\ e^{-\ i\ k\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (5.2.1.3a)$$

$$\psi_2(x,\ t)\ =\ (C\ e^{\bar{q}\ x}\ +\ D\ e^{-\ \bar{q}\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (5.2.1.3b)$$

$$\psi_3(x,\ t)\ =\ (B\ e^{i\ k\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (5.2.1.3c)$$

onde:

$$k^2\ =\ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2}\ , \qquad \bar{q}^2\ =\ \frac{2\ m\ (V\ -\ E)}{\hbar^2}\ . \qquad (5.2.1.4a\text{-}b)$$

Fazendo-se uso das condições de continuidade da função de onda (ψ) e de suas derivadas espaciais ($\frac{\partial \psi}{\partial x}$) nos limites da barreira de potencial indicados nas expressões (5.2.1.2a-b), virá:

a) Para x = 0 (∀ t):

$$\psi_1(0,\ t)\ =\ \psi_2(0,\ t)\ \ \rightarrow\ \ 1\ +\ A\ =\ C\ +\ D\ , \qquad (5.2.1.5a)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \equiv \psi_1'|_{x\ =\ 0}\ =\ \psi_2'|_{x\ =\ 0}\ \ \rightarrow$$

$$i\ k\ (1\ -\ A)\ =\ \bar{q}\ (C\ -\ D)\ \ \rightarrow$$

$$1\ -\ A\ =\ -\ i\ \frac{\bar{q}}{k}\ (C\ -\ D)\ . \qquad (5.2.1.5b)$$

Subtraindo-se as expressões (5.2.1.5a-b), resultará:

$$2\ A\ =\ C\ +\ D\ +\ i\ \frac{\bar{q}}{k}\ C\ -\ i\ \frac{\bar{q}}{k}\ D\ \ \rightarrow$$

$$A\ =\ \frac{1}{2}\ [C\ (1\ +\ i\ \frac{\bar{q}}{k})\ +\ D\ (1\ -\ i\ \frac{\bar{q}}{k})]\ . \qquad (5.2.1.6)$$

b) Para x = L (∀ t):

$$\psi_2(L,\ t) \ = \ \psi_3(L,\ t) \quad \rightarrow$$

$$C\ e^{\bar{q}\ L} \ + \ D\ e^{-\ \bar{q}\ L} \ = \ B\ e^{i\ k\ L}\ , \qquad (5.2.1.7a)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \equiv \psi_2'|_{x\ =\ L} \ = \ \psi_3'|_{x\ =\ L} \quad \rightarrow$$

$$\bar{q}\ (C\ e^{\bar{q}L} \ - \ D\ e^{-\ \bar{q}\ L}) \ = \ i\ k\ B\ e^{i\ k\ L} \rightarrow$$

$$C\ e^{\bar{q}L} \ - \ D\ e^{-\ \bar{q}\ L} \ = \ i\ \tfrac{k}{\bar{q}}\ B\ e^{i\ k\ L}\ . \qquad (5.2.1.7b)$$

Somando-se as expressões (5.2.1.7a-b), teremos:

$$2\ C\ e^{\bar{q}L} \ = \ B\ (1\ +\ i\ \tfrac{k}{\bar{q}})\ e^{i\ k\ L} \quad \rightarrow$$

$$C \ = \ \tfrac{1}{2}\ B(1\ +\ i\ \tfrac{k}{\bar{q}})\ e^{(i\ k\ -\ \bar{q})\ L}\ . \qquad (5.2.1.8a)$$

Subtraindo-se as expressões (5.2.1.7a-b), teremos:

$$2\ D\ e^{-\ \bar{q}L} \ = \ B\ (1\ -\ i\ \tfrac{k}{\bar{q}})\ e^{i\ k\ L} \quad \rightarrow$$

$$D \ = \ \tfrac{1}{2}\ B(1\ -\ i\ \tfrac{k}{\bar{q}})\ e^{(i\ k\ +\ \bar{q})\ L}\ . \qquad (5.2.1.8b)$$

Considerando-se a expressão (5.2.1.6) e inserindo-se nela as expressões (5.2.1.8a-b), virá:

$$A \ = \ \tfrac{1}{2}\ \Big[\ \tfrac{1}{2}\ B(1\ +\ i\ \tfrac{k}{\bar{q}})\ e^{(i\ k\ -\ \bar{q})\ L}\ (1\ +\ i\ \tfrac{\bar{q}}{k})\ +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\ B(1\ -\ i\ \tfrac{k}{\bar{q}})\ e^{(i\ k\ +\ \bar{q})\ L}\ (1\ -\ i\ \tfrac{\bar{q}}{k})\ \Big]\ =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} B(1 + i \frac{k}{\bar{q}} + i \frac{\bar{q}}{k} - 1) e^{(i k - \bar{q}) L} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} B(1 - i \frac{k}{\bar{q}} - i \frac{\bar{q}}{k} - 1) e^{(i k + \bar{q}) L} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} B \left[\frac{i (k^2 + \bar{q}^2)}{k \bar{q}} \right] e^{(i k - \bar{q}) L} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} B \left[- \frac{i (k^2 + \bar{q}^2)}{k \bar{q}} \right] e^{(i k + \bar{q}) L} \right) =$$

$$= B \frac{i (k^2 + \bar{q}^2)}{4 k \bar{q}} e^{i k L} (e^{- \bar{q} L} - e^{\bar{q} L}) \rightarrow$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \frac{(k^2 + \bar{q}^2)}{4 i k \bar{q}} e^{i k L} (e^{\bar{q} L} - e^{- \bar{q} L}) . \qquad (5.2.1.9)$$

Usando-se as expressões (5.2.1.8a-b,9) na expressão (5.2.1.5a), teremos:

$$1 + B \frac{(k^2 + \bar{q}^2)}{4 i k \bar{q}} e^{i k L} (e^{\bar{q} L} - e^{- \bar{q} L}) =$$

$$= \frac{B}{2} [(1 + i \frac{k}{\bar{q}}) e^{(i k - \bar{q}) L} + (1 - i \frac{k}{\bar{q}}) e^{(i k + \bar{q}) L}] =$$

$$= \frac{B}{2} e^{i k L} [(1 + i \frac{k}{\bar{q}}) e^{- \bar{q} L} + (1 - i \frac{k}{\bar{q}}) e^{\bar{q} L}] .$$

Multiplicando-se a expressão acima por $e^{- i k L}$, virá:

$$e^{- i k L} + \frac{B}{2} \frac{(k^2 + \bar{q}^2)}{2 i k \bar{q}} (e^{\bar{q} L} - e^{- \bar{q} L}) =$$

$$= \frac{B}{2} [(1 + i \frac{k}{\bar{q}}) e^{- \bar{q} L} + (1 - i \frac{k}{\bar{q}}) e^{\bar{q} L}] \rightarrow$$

$$e^{- i k L} = \frac{B}{2} [e^{\bar{q} L} (1 - \frac{i k}{\bar{q}} - \frac{k^2 + \bar{q}^2}{2 i k \bar{q}}) +$$

$$+ \, e^{- \, \bar{q} \, L} \, (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}} \; + \; \frac{k^2 \, + \, \bar{q}^2}{2 \, i \, k \, \bar{q}})] \; =$$

$$= \; \frac{B}{2} \; [e^{\bar{q} \, L} \; (\frac{2 \, i \, k \, \bar{q}^2 \, + \, 2 \, k^2 \, \bar{q} \, - \, k^2 \, \bar{q} \, - \, \bar{q}^3}{2 \, i \, k \, \bar{q}^2}) \; +$$

$$+ \, e^{- \, \bar{q} \, L} \; (\frac{2 \, i \, k \, \bar{q}^2 \, - \, 2 \, k^2 \, \bar{q} \, + \, k^2 \, \bar{q} \, + \, \bar{q}^3}{2 \, i \, k \, \bar{q}^2})] \; =$$

$$= \; \frac{B}{2} \; [e^{\bar{q} \, L} \; (\frac{2 \, i \, k \, \bar{q} \, + \, k^2 \, - \, \bar{q}^2}{2 \, i \, k \, \bar{q}}) \; + \; e^{- \, \bar{q} \, L} \; (\frac{2 \, i \, k \, \bar{q} \, - \, k^2 \, + \, \bar{q}^2}{2 \, i \, k \, \bar{q}})] \; =$$

$$= \; \frac{B}{4 \, i \, k \, \bar{q}} \; [e^{\bar{q} \, L} \; (i \, \bar{q} \; + \; k)^2 \; + \; e^{- \, \bar{q} \, L} \; (\bar{q} \; + \; i \, k)^2] \; =$$

$$= \; \frac{B}{4 \, i \, k \, \bar{q}} \; [e^{\bar{q} \, L} \; (i \, \bar{q})^2 \; (1 \; + \; \frac{k}{i \, \bar{q}})^2 \; + \; e^{- \, \bar{q} \, L} \; \bar{q}^2 \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2] \; =$$

$$= \; - \; \frac{B \, \bar{q}}{4 \, i \, k} \; [e^{\bar{q} \, L} \; (1 \; - \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2 \; - \; e^{- \, \bar{q} \, L} \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2] \quad \rightarrow$$

$$B \; = \; - \; \frac{4 \, i \, k}{\bar{q}} \; e^{- \, i \, k \, L} \; [e^{\bar{q} \, L} \; (1 \; - \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2 \; -$$

$$- \, e^{- \, \bar{q} \, L} \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2]^{- \, 1} \, . \qquad (5.2.1.10)$$

Agora, de posse da expressão (5.2.1.10), calculemos o **coeficiente de tunelamento** b^2, que é dado por:

$$b^2 \; = \; B \, B^* \; = \; \frac{16 \, k^2}{\bar{q}^2} \; \Big(\; [e^{\bar{q} \, L} \; (1 - \frac{i \, k}{\bar{q}})^2 - e^{- \, \bar{q} \, L} \; (1 + \frac{i \, k}{\bar{q}})^2] \quad \times$$

$$\times \quad [e^{\bar{q} \, L} \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2 \; - \; e^{- \, \bar{q} \, L} \; (1 \; - \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^2] \; \Big)^{- \, 1} \; =$$

$$= \; \frac{16 \, k^2}{\bar{q}^2} \; \Big(\; e^{2 \, \bar{q} \, L} \; [(1 \; - \; \frac{i \, k}{\bar{q}}) \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})]^2 \; - \; (1 \; - \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^4 \; -$$

$$- \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})^4 \; + \; e^{- \, 2 \, \bar{q} \, L} \; [(1 \; - \; \frac{i \, k}{\bar{q}}) \; (1 \; + \; \frac{i \, k}{\bar{q}})]^2 \; \Big)^{- \, 1} \; =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big((1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 (e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}) -$$

$$- [(1 + \frac{i\ k}{\bar{q}})^4 + (1 - \frac{i\ k}{\bar{q}})^4] \Big)^{-\ 1} =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big[(1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 (e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}) - [(1 - \frac{k^2}{\bar{q}^2} +$$

$$+ \frac{2\ i\ k}{\bar{q}})^2 + (1 - \frac{k^2}{\bar{q}^2} - \frac{2\ i\ k}{\bar{q}})^2] \Big]^{-\ 1} =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big[(1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 (e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}) - (1 + \frac{k^4}{\bar{q}^4} -$$

$$- \frac{4\ k^2}{\bar{q}^2} - \frac{2\ k^2}{\bar{q}^2} + \frac{4\ i\ k}{\bar{q}} - \frac{4\ i\ k^3}{\bar{q}^3} +$$

$$+ 1 + \frac{k^4}{\bar{q}^4} - \frac{4\ k^2}{\bar{q}^2} - \frac{2\ k^2}{\bar{q}^2} - \frac{4\ i\ k}{\bar{q}} + \frac{4\ i\ k^3}{\bar{q}^3}) \Big]^{-\ 1} =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big[(1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 (e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}) -$$

$$- (2 + \frac{2\ k^4}{\bar{q}^4} - \frac{12\ k^2}{\bar{q}^2}) \Big]^{-\ 1} =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big[2\ (1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 \frac{(e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L})}{2} -$$

$$- 2\ (1 + \frac{k^4}{\bar{q}^4} + \frac{2\ k^2}{\bar{q}^2}) + \frac{16\ k^2\ \bar{q}^2}{\bar{q}^4} \Big]^{-\ 1} =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big[2\ (1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 \frac{(e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L})}{2} -$$

$$- 2\ (1 + \frac{k^2}{\bar{q}^2})^2 + \frac{16\ k^2\ \bar{q}^2}{\bar{q}^4} \Big]^{-\ 1} =$$

$$= \frac{16\ k^2}{\bar{q}^2} \Big(\frac{2}{\bar{q}^2} \Big)^{-\ 1} \Big[(k^2 + \bar{q}^2)^2 \frac{(e^{2\ \bar{q}\ L} + e^{-\ 2\ \bar{q}\ L})}{2} -$$

$$- (k^2 + \bar{q}^2)^2 + 8 k^2 \bar{q}^2 \Big]^{-1} \rightarrow$$

$$b^2 = 8 k^2 \bar{q}^2 \Big[(k^2 + \bar{q}^2)^2 \frac{(e^{2 \bar{q} L} + e^{-2 \bar{q} L})}{2} -$$

$$- (k^2 + \bar{q}^2)^2 + 8 k^2 \bar{q}^2 \Big]^{-1} . \qquad (5.2.1.11)$$

Considerando-se as identidades:[6]

$$cosh\ \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} , \qquad (5.2.1.12a)$$

$$cosh\ 2 \alpha = 1 + 2\ senh^2\ \alpha , \qquad (5.2.1.12b)$$

a expressão (5.2.1.11) ficará:

$$b^2 = 8 k^2 \bar{q}^2 \Big[(k^2 + \bar{q}^2)^2\ cosh\ (2 \bar{q} L) -$$

$$- (k^2 + \bar{q}^2)^2 + 8 k^2 \bar{q}^2 \Big]^{-1} =$$

$$= 8 k^2 \bar{q}^2 \Big[(k^2 + \bar{q}^2)^2 [cosh\ (2 \bar{q} L) - 1] + 8 k^2 \bar{q}^2 \Big]^{-1} =$$

$$= 8 k^2 \bar{q}^2 (8 k^2 \bar{q}^2)^{-1} \Big[\frac{(k^2 + \bar{q}^2)^2}{8 k^2 \bar{q}^2} 2\ senh^2\ (\bar{q} L) + 1 \Big]^{-1} \rightarrow$$

$$b^{-2} = 1 + \frac{(k^2 + \bar{q}^2)^2}{4 k^2 \bar{q}^2}\ senh^2\ (\bar{q} L) . \qquad (5.2.1.13)$$

Vejamos, agora, o caso do **tunelamento quântico** para grandes barreiras, ou seja [vide expressão (5.2.1.4b) e lembrar que E é fixo]:

$$V,\ L \gg 1 \rightarrow \bar{q} L \gg 1 . \qquad (5.2.1.14)$$

Considerando-se que:[6]

$$senh\ \alpha\ =\ \frac{(e^{\alpha}\ -\ e^{-\ \alpha})}{2}\ , \qquad (5.2.1.15a)$$

$$senh\ (\alpha \gg 1) \simeq \frac{e^{\alpha}}{2}\ \ \gg 1, \qquad (5.2.1.15b)$$

a expressão (5.2.1.13) ficará:

$$b^{-\ 2} \simeq \frac{(k^2\ +\ \bar{q}^2)^2}{16\ k^2\ \bar{q}^2}\ e^{2\ \bar{q}\ L}\ . \qquad (5.2.1.16a)$$

Usando-se as expressões (5.2.1.4a-b), teremos:

$$\frac{(k^2\ +\ \bar{q}^2)^2}{16\ k^2\ \bar{q}^2}\ =\ \frac{\left[\frac{2\ m\ E}{\hbar^2}\ +\ \frac{2\ m\ (V\ -\ E)}{\hbar^2}\right]^2}{16\ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2}\ \frac{2\ m\ (V\ -\ E)}{\hbar^2}}\ =$$

$$=\ \frac{[2\ m\ (E\ +\ V\ -\ E)]^2}{64\ m^2\ E\ (V\ -\ E)}\ \ \rightarrow$$

$$\frac{(k^2\ +\ \bar{q}^2)^2}{16\ k^2\ \bar{q}^2}\ =\ \frac{V^2}{16\ E\ (V\ -\ E)}\ .$$

Levando-se a expressão acima na expressão (5.2.1.16a) e usando-se a expressão (5.2.1.4b), obteremos:

$$b^2\ =\ \frac{16\ E\ (V\ -\ E)}{V^2}\ e^{-\ \frac{2\ L}{\hbar}\ \sqrt{2\ m\ (V\ -\ E)}}\ . \qquad (5.2.1.16b)$$

O resultado acima nos mostra que haverá transmissão da barreira (**tunelamento**), embora a energia da partícula seja menor do que a altura da barreira de potencial ($E\ <\ V$).

5.2.2. Tunelamento Quântico Conservativo Via Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

Vamos resolver, neste item, o mesmo problema resolvido no item 5.2.1., qual seja, o **tunelamento quântico**

de um fluxo estacionário de partículas com energia E, através de uma barreira de potencial de altura V e largura L [vide expressões (5.2.1.2a-b)], só que, agora, sob o ponto de vista da $MQBB$ estudada no Capítulo 1, cujos principais resultados, necessários para o estudo desse item, são os que mostraremos a seguir.

Tomemos a **equação de Schrödinger** definida pela expressão (5.2.1.1), ou seja:

$$\mathrm{i}\,\hbar\ \frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2\ \psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ V(x,\ t)\ \ \psi(x,\ t)\ , \qquad (5.2.2.1)$$

e consideremos a função de onda $\psi(x,\ t)$ na forma polar ou **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (1.2.1.2)]:

$$\psi(x,\ t)\ =\ \phi(x,\ t)\ e^{i\ S(x,\ t)}. \qquad (5.2.2.2)$$

Levando-se a expressão (5.2.2.2) na expressão (5.2.2.1), demonstramos no Capítulo 1 as seguintes expressões [vide expressões (1.2.1.10,12b)]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\ +\ \frac{\partial(\rho\ v_{qu})}{\partial x}\ =\ 0\ , \qquad (5.2.2.3)$$

$$\hbar\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ [\frac{1}{2}\ m\ v_{qu}^2\ +\ V\ +\ V_{qu}]\ =\ 0\ , \qquad (5.2.2.4)$$

onde [vide expressões (1.2.1.7,8,11a-b)]:

$$\rho(x,\ t)\ =\ |\psi(x,\ t)|^2\ =\ \phi^2(x,\ t)\ , \qquad (5.2.2.5)$$

$$v_{qu}(x,\ t)\ =\ \frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S(x,\ t)}{\partial x}\ , \qquad (5.2.2.6)$$

$$V_{qu}\ =\ -\ (\frac{\hbar^2}{2\ m\ \phi})\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ =$$

$$= \; - \; \frac{\hbar^2}{2 \; m} \; \frac{1}{\sqrt{\rho}} \; \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} \; , \qquad (5.2.2.7a\text{-}b)$$

representam, respectivamente, a **densidade de massa** (ρ), a **velocidade quântica** (v_{qu}) e o **potencial quântico** (V_{qu}).

Ainda no Capítulo 1, demonstramos que [vide expressões (1.2.1.22,29)]:

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} \; + \; \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} \; + \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial x} \; = \; 0 \; , \qquad (5.2.2.8)$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} \; + \; \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} \; - \; \frac{\rho}{m} \; \frac{\partial V}{\partial t} \; = \; 0 \; , \qquad (5.2.2.9)$$

onde [vide expressões (1.2.1.17,21,23,28)]:

$$J_{qu} \; = \; \rho \; v_{qu} \; , \qquad (5.2.2.10)$$

$$P_{qu} \; = \; \rho \; v_{qu}^2 \; - \; \frac{\hbar^2}{4 \; m^2} \; [\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \; - \; \frac{1}{\rho} \; (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2] \; , \qquad (5.2.2.11)$$

$$U_{qu} \; = \; \frac{\rho}{m} \; (\frac{v_{qu}^2}{2} \; + \; V \; + \; V_{qu}) \; , \qquad (5.2.2.12)$$

$$Q_{qu} \; = \; v_{qu} \; U_{qu} \; + \; \frac{\hbar^2}{2 \; m^2} \; [\sqrt{\rho} \; \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t}) \; -$$

$$- \; \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} \; \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x}] \; , \qquad (5.2.2.13)$$

representam, respectivamente, a **densidade de momento linear quântico** (J_{qu}), o **fluxo da densidade de momento linear quântico** (P_{qu}), a **densidade de energia quântica** (U_{qu}) e o **fluxo da densidade de energia quântica** (Q_{qu}).

Apresentados os principais resultados da $MQBB$, vamos estudar o tunelamento quântico de um fluxo estacionário de partículas com energia E, através de uma barreira de potencial de altura V e largura L.

Para o caso em questão, as condições de fronteira corretas são determinadas por intermédio da integração das expressões (5.2.2.3,8-9) sobre uma superfície infinitesimal fechada nas fronteiras (σ) da barreira de potencial.[7] Desse modo, teremos que:

$$\rho \;\Leftrightarrow\; \psi^* \, \psi \, , \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} \;\Leftrightarrow\; \psi^* \, \frac{\partial \psi}{\partial x} \, , \qquad (5.2.2.14\text{a-b})$$

$$J_{qu} \;=\; \rho \, v_{qu} \, , \qquad (5.2.2.14\text{c})$$

$$\frac{1}{2} \, m \, v_{qu}^2 \;+\; V \;+\; V_{qu} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial S}{\partial t} \, , \qquad (5.2.2.14\text{d})$$

devem ser contínuas em σ, sendo as equivalências indicadas nessas expressões decorrentes, respectivamente, das expressões (5.2.2.4-6). É oportuno destacar que as continuidades em σ representadas pelas expressões (5.2.2.14a-d) não são condições necessárias, porém suficientes.

Considerando-se as condições de contorno indicadas nas expressões (5.2.2.14a-d), é conveniente usarmos a função de onda ψ na forma polar [vide expressões (5.2.2.2,5)]:

$$\psi \;=\; \sqrt{\rho} \, e^{i \, S} \, . \qquad (5.2.2.15)$$

Desse modo, para estudarmos o tunelamento quântico de um fluxo estacionário de partículas com energia E, através de uma barreira de potencial de altura V e largura L, definidos pelas expressões (5.2.1.2a-b), é necessário transformar as expressões (5.2.1.3a-c) na forma polar indicada acima. Inicialmente, consideremos que:

$$\psi \;=\; A_1 \, e^{i \, z_1} \;+\; A_2 \, e^{i \, z_2} \;=\; a_1 \, e^{i \, \alpha_1} \, e^{i \, z_1} \;+\; a_2 \, e^{i \, \alpha_2} \, e^{i \, z_2} \;\to$$

$$\psi \;=\; a_1 \, e^{i \, (z_1 \, + \, \alpha_1)} \;+\; a_2 \, e^{i \, (z_2 \, + \, \alpha_2)} \, . \qquad (5.2.2.16)$$

Partindo-se da expressão (5.2.2.16) e usando-se a **fórmula de Euler** ($e^{\pm\ i\ \alpha}\ =\ cos\ \alpha \pm i\ sen\ \alpha$), teremos (considerar que $x_{1,2}\ =\ z_{1,2}\ +\ \alpha_{1,2}$):

$$\psi\ =\ a_1\ e^{i\ (z_1\ +\ \alpha_1)}\ +\ a_2\ e^{i\ (z_2\ +\ \alpha_2)}\ =\ a_1\ e^{i\ x_1}\ +\ a_2\ e^{i\ x_2}\ =$$

$$=\ e^{i\ (\frac{x_1\ +\ x_2}{2})}\ [a_1\ e^{i\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})}\ +\ a_2\ e^{-\ i\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})}]\ =$$

$$=\ e^{i\ (\frac{x_1\ +\ x_2}{2})}\ \Big[\ a_1\ cos\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ +\ i\ sen\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ +$$

$$+\ a_2\ cos\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ -\ i\ sen\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ \Big]\ =$$

$$=\ e^{i\ (\frac{x_1\ +\ x_2}{2})}\ \Big[\ (a_1\ +\ a_2)\ cos\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ +$$

$$+\ i\ (a_1\ -\ a_2)\ sen\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ \Big]\ \ \rightarrow$$

$$\psi\ =\ (c_1\ +\ i\ c_2)\ e^{i\ (\frac{x_1\ +\ x_2}{2})}\ , \qquad (5.2.2.17)$$

onde:

$$c_1\ =\ (a_1\ +\ a_2)\ cos\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ , \qquad (5.2.2.18a)$$

$$c_2\ =\ (a_1\ -\ a_2)\ sen\ (\frac{x_1\ -\ x_2}{2})\ . \qquad (5.2.2.18b)$$

Usando-se a forma polar de um número complexo, qual seja:[6]

$$c_1\ +\ i\ c_2\ =\ \sqrt{c_1^2\ +\ c_2^2}\ e^{i\ tg^{-\ 1}\ (c_2/c_1)}\ , \qquad (5.2.2.19)$$

a expressão (5.2.2.17) ficará:

$$\psi \ = \ \sqrt{c_1^2 \ + \ c_2^2} \ e^{i \ tg^{-\ 1} \ c_2/c_1} \ e^{i \ (\frac{x_1 \ + \ x_2}{2})} \ . \qquad (5.2.2.20)$$

Chamando-se (lembrar que $x_{1,2} \ = \ z_{1,2} \ + \ \alpha_{1,2}$):

$$E \ = \ \frac{x_1 \ - \ x_2}{2} \ = \ \frac{z_1 \ + \ \alpha_1 \ - \ z_2 \ - \ \alpha_2}{2} \ , \qquad (5.2.2.21)$$

e usando-se as expressões (5.2.2.18a-b), virá (lembrar que $cos \ 2 \ \beta \ = \ cos^2 \ \beta \ - \ sen^2 \ \beta$):

$$c_1^2 \ + \ c_2^2 \ = \ (a_1 \ + \ a_2)^2 \ + \ cos^2 \ E \ + \ (a_1 \ - \ a_2)^2 \ + \ sen^2 \ E \ =$$

$$= (a_1^2 \ + \ a_2^2 \ + \ 2 \ a_1 \ a_2) \ cos^2 E + (a_1^2 + a_2^2 \ - \ 2 \ a_1 \ a_2) \ sen^2 E =$$

$$= \ (a_1^2 \ + \ a_2^2) \ cos^2 \ E \ + \ (a_1^2 \ + \ a_2^2) \ sen^2 \ E \ +$$

$$+ \ 2 \ a_1 \ a_2 \ cos^2 \ E \ - \ 2 \ a_1 \ a_2 \ sen^2 \ E \ =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2)(cos^2 \ E + sen^2 \ E) + 2 \ a_1 \ a_2 \ (cos^2 \ E - sen^2 \ E) \ \rightarrow$$

$$c_1^2 \ + \ c_2^2 \ = \ a_1^2 \ + \ a_2^2 \ + \ 2 \ a_1 \ a_2 \ cos \ 2 \ E \ , \qquad (5.2.2.22a)$$

$$\frac{c_2}{c_1} \ = \ \frac{a_1 \ - \ a_2}{a_1 \ + \ a_2} \ \frac{sen \ E}{cos \ E} \ = \ \frac{a_1 \ - \ a_2}{a_1 \ + \ a_2} \ tg \ E \ . \qquad (5.2.2.22b)$$

Considerando-se a expressão (5.2.2.20) e inserindo-se nela as expressões (5.2.2.22a-b), teremos (devemos lembrar que $x_{1,2} \ = \ z_{1,2} + \ \alpha_{1,2}$):

$$\psi \ = \ \sqrt{a_1^2 \ + \ a_2^2 \ + \ 2 \ a_1 \ a_2 \ cos \ (z_1 \ + \ \alpha_1 \ - \ z_2 \ - \ \alpha_2)} \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ i \ \Big(\ \frac{z_1 \ + \ \alpha_1 \ + \ z_2 \ + \ \alpha_2}{2} \ +$$

$$+ \ tg^{-\ 1} \ [\frac{a_1 \ - \ a_2}{a_1 \ + \ a_2} \ tg \ (\frac{z_1 \ + \ \alpha_1 \ - \ z_2 \ - \ \alpha_2}{2})] \ \Big) \ \Big] \ . \qquad (5.2.2.23)$$

Conforme vimos no item 5.2.1., as funções de onda para as três regiões que compõem a barreira de potencial [região de incidência (1), região de tunelamento (2) e região de transmissão (3)] em estudo são dadas por [vide expressões (5.2.1.3a-c,4a-b)]:

$$\psi_1(x,\ t) \ = \ (e^{i\ k\ x} \ + \ A\ e^{-\ i\ k\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (5.2.2.24a)$$

$$\psi_2(x,\ t) \ = \ (C\ e^{\bar{q}\ x} \ + \ D\ e^{-\ \bar{q}\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (5.2.2.24b)$$

$$\psi_3(x,\ t) \ = \ (B\ e^{i\ k\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (5.2.2.24c)$$

com:

$$k^2 \ = \ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2}\ , \qquad \bar{q}^2 \ = \ \frac{2\ m\ (E\ -\ V)}{\hbar^2}\ . \qquad (5.2.2.25a\text{-}b)$$

Agora, vamos obter a representação polar das expressões (5.2.2.24a-c) usando-se, inicialmente, a parte espacial da função $\psi(x,\ t)$ [vide expressão (5.2.2.16)]. Desse modo, teremos:

Região 1:

$$\psi_1(x) \ = \ e^{i\ k\ x} \ + \ A\ e^{-\ i\ k\ x} \ =$$

$$e^{i\ k\ x} \ + \ a\ e^{i\ \alpha}\ e^{-\ i\ k\ x} \ \equiv \ a_1\ e^{i\ \alpha_1}\ e^{i\ z_1} \ + \ a_2\ e^{i\ \alpha_2}\ e^{i\ z_2} \ \to$$

$$a_1 \ = \ 1\ , \qquad \alpha_1 \ = \ 0\ , \qquad z_1 \ = \ k\ x\ , \qquad (5.2.2.26a\text{-}c)$$

$$a_2 \ = \ a\ , \qquad \alpha_2 \ = \ \alpha\ , \qquad z_2 \ = \ -\ k\ x\ . \qquad (5.2.2.26d\text{-}f)$$

Tomando-se a expressão (5.2.2.24a), substituindo-se nela as expressões acima e, na continuação, usando-se as expressões (5.2.2.15,23), resultará:

$$\psi_1(x,\ t)\ =\ \sqrt{\rho_1}\ e^{i\ S_1}\ =$$

$$=\ \sqrt{1\ +\ a^2\ +\ 2\ a\ cos\ (2\ k\ x\ -\ \alpha)}\ \times\ exp\ \Big[\ i\ \Big(\ -\ \omega\ t\ +$$

$$+\ \tfrac{\alpha}{2}\ +\ tg^{-\ 1}\ [\tfrac{1\ -\ a}{1\ +\ a}\ tg\ (k\ x\ -\ \tfrac{\alpha}{2})]\ \Big)\ \Big]\ . \qquad (5.2.2.27)$$

Região 2:

$$\psi_2(x)\ =\ C\ e^{\bar{q}\ x}\ +\ D\ e^{-\ \bar{q}\ x}\ =$$

$$=\ \tfrac{c}{\sqrt{\bar{q}}}\ e^{\bar{q}\ x}\ e^{i\ \gamma}\ +\ \tfrac{d}{\sqrt{\bar{q}}}\ e^{-\ \bar{q}\ x}\ e^{i\ \delta}\ \quad \equiv$$

$$\equiv a_1\ e^{i\ \alpha_1}\ e^{i\ z_1}\ +\ a_2\ e^{i\ \alpha_2}\ e^{i\ z_2}\ \quad \to$$

$$a_1\ =\ \tfrac{c}{\sqrt{\bar{q}}}\ e^{\bar{q}\ x}\ , \qquad \alpha_1\ =\ \gamma\ , \qquad z_1\ =\ 0\ , \qquad (5.2.2.28\text{a-c})$$

$$a_2\ =\ \tfrac{d}{\sqrt{\bar{q}}}\ e^{-\ \bar{q}\ x}, \qquad \alpha_2\ =\ \delta\ , \qquad z_2\ =\ 0. \qquad (5.2.2.28\text{d-f})$$

Considerando-se a expressão (5.2.2.24b), inserindo-se nela as expressões acima e, em seguimento, usando-se as expressões (5.2.2.15,23), obteremos:

$$\psi_2(x,\ t)\ =\ \sqrt{\rho_2}\ e^{i\ S_2}\ =$$

$$=\ \sqrt{\tfrac{1}{\bar{q}}\ [c^2\ e^{2\ \bar{q}\ x}\ +\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ x}\ +\ 2\ c\ d\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)]}\ \quad \times$$

$$\times\ \exp\ \Big[\ i\ \Big(\ -\ \omega\ t\ +\ \tfrac{\gamma\ +\ \delta}{2}\ +$$

$$+\ tg^{-\ 1}\ [\tfrac{c\ e^{\bar{q}\ x}\ -\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x}}{c\ e^{\bar{q}\ x}\ +\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x}}\ tg\ (\tfrac{\gamma\ -\ \delta}{2})]\ \Big)\ \Big]\ ; \qquad (5.2.2.29)$$

Região 3:

$$\psi_3(x) \; = \; B \; e^{i \; k \; x} \; = \; 0 \; e^{i \; (0 \; + \; 0)} \; + \; b \; e^{i \; \beta} \; e^{i \; k \; x} \; \equiv$$

$$\equiv a_1 \; e^{i \; \alpha_1} \; e^{i \; z_1} \; + \; a_2 \; e^{i \; \alpha_2} \; e^{i \; z_2} \; \rightarrow$$

$$a_1 \; = \; 0 \; , \qquad \alpha_1 \; = \; 0 \; , \qquad z_1 \; = \; 0 \; , \qquad (5.2.2.30a\text{-}c)$$

$$a_2 \; = \; b \; , \qquad \alpha_2 \; = \; \beta \; , \qquad z_2 \; = \; k \; x \; . \qquad (5.2.2.30d\text{-}f)$$

Tomando-se a expressão (5.2.2.24c), substituindo-se nela as expressões acima e, em seguida, usando-se as expressões (5.2.2.15,23), virá [lembrar que $tg \; (- \; \alpha) \; = \; - \; tg \; \alpha$]:

$$\psi_3(x, \; t) \; = \; \sqrt{\rho_3} \; e^{i \; S_3} \; =$$

$$= \; \sqrt{0 \; + \; b^2 \; + \; 2 \times 0 \times b \; cos \; (0 \; + \; 0 \; - \; k \; x \; - \; \beta)} \; \times$$

$$\times \; \exp \Big[\; i \; \Big(\; - \; \omega \; t \; + \; \tfrac{0 \; + \; 0 \; + \; k \; x \; + \; \beta}{2} \; +$$

$$+ \; tg^{- \; 1} \; [\tfrac{0 \; - \; b}{0 \; + \; b} \; tg \; (\tfrac{0 \; + \; 0 \; - \; k \; x \; - \; \beta}{2})] \; \Big) \; \Big] \; \rightarrow$$

$$\psi_3(x, \; t) \; = \; \sqrt{\rho_3} \; e^{i \; S_3} \; =$$

$$= \; \sqrt{b^2} \; \exp \; [\mathrm{i} \; (\text{-} \; \omega \; t \; + \; k \; x \; + \; \beta)] \; . \qquad (5.2.2.31)$$

Antes de usarmos as condições de contorno representadas pelas expressões (5.2.2.14a-d), obteremos algumas expressões úteis na aplicação dessas condições. Assim, usando-se as seguintes identidades:[6]

$$cos \; 2\theta \; = \; cos^2 \; \theta \; - \; sen^2 \; \theta \; , \qquad (5.2.2.32a)$$

$$sen \; 2 \; \theta \; = 2 \; sen \; \theta \; cos \; \theta \; , \qquad (5.2.2.32b)$$

$$\frac{d}{dy}\ (cos\ z)\ =\ -\ sen\ z\ (\frac{dz}{dy})\ , \qquad (5.2.2.32c)$$

$$\frac{d}{dy}\ [tg^{-\ 1}(z)]\ =\ \frac{1}{1\ +\ z^2}\ (\frac{dz}{dy})\ , \qquad (5.2.2.32d)$$

$$\frac{d}{dy}\ (tg\ z)\ =\ sec^2\ y\ (\frac{dz}{dy})\ , \qquad (5.2.2.32e)$$

$$\frac{d}{dy}\ (\frac{u}{v})\ =\ \frac{v\ (\frac{du}{dy})\ -\ u\ (\frac{dv}{dy})}{v^2}\ , \qquad (5.2.2.32f)$$

$$\frac{d}{dy}\ (e^{\pm\ z})\ =\ \pm\ e^{\pm\ z}\ (\frac{dz}{dy})\ , \qquad (5.2.2.32g)$$

e as expressões (5.2.2.5,27,29,31), obteremos:

$$\rho_1(x)\ =\ 1\ +\ a^2\ +\ 2\ a\ cos\ (2\ k\ x\ -\ \alpha)\ , \qquad (5.2.2.33a)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \equiv \rho_1'(x)\ =\ -\ 4\ a\ k\ sen\ (2\ k\ x\ -\ \alpha)\ , \qquad (5.2.2.33b)$$

$$S_1(x,\ t)\ =\ \Big(\ -\ \omega\ t\ +\ \frac{\alpha}{2}\ +$$

$$+\ tg^{-\ 1}\ [\frac{1\ -\ a}{1\ +\ a}\ tg\ (k\ x\ -\ \frac{\alpha}{2})]\ \Big)\ , \qquad (5.2.2.33c)$$

$$\mathrm{v}_{qu1}(x,\ t)\ =\ \frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial S_1(x,\ t)}{\partial x}\ =$$

$$=\ \frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ -\ \omega\ t\ +\ \frac{\alpha}{2}\ +\ tg^{-\ 1}\ [\frac{1\ -\ a}{1\ +\ a}\ tg\ (k\ x\ -\ \frac{\alpha}{2})]\ \Big)\ .$$

Chamando-se:

$$\theta\ =\ k\ x\ -\ \frac{\alpha}{2}\ , \qquad (5.2.2.34a)$$

teremos:

$$v_{qu1}\ =\ \frac{\hbar}{m}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [tg^{-\ 1}\ (\frac{1\ -\ a}{1\ +\ a}\ tg\ \theta)]\ =$$

$$= \frac{\hbar}{m} \frac{1}{1 + (\frac{1 - a}{1 + a})^2 \; tg^2 \; \theta} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1 - a}{1 + a} \; tg \; \theta) =$$

$$= \frac{\hbar}{m} [\frac{(1 + a)^2}{(1 + a)^2 + (1 - a)^2 \; \frac{sen^2 \; \theta}{cos^2 \; \theta}}] (\frac{1 - a}{1 + a}) \; sec^2 \; \theta \; (\frac{\partial \theta}{\partial x}) =$$

$$= \frac{\hbar}{m} [\frac{(1 + a) \; cos^2 \; \theta}{(1 + a^2 + 2 \; a) \; cos^2 \; \theta + (1 + a^2 - 2 \; a) \; sen^2 \; \theta}] [\frac{k \; (1 - a)}{cos^2 \; \theta}] =$$

$$= \frac{\hbar}{m} [\frac{k \; (1 - a^2)}{(1 + a^2) \; (sen^2 \; \theta + cos^2 \; \theta) + 2 \; a(cos^2 \; \theta - sen^2 \; \theta)}] \quad \rightarrow$$

$$v_{qu1}(x) = \frac{\hbar}{m} [\frac{k \; (1 - a^2)}{1 + a^2 + 2 \; a \; cos \; 2 \; \theta}] \; . \qquad (5.2.2.34b)$$

Usando-se a expressão (5.2.2.10), substituindo-se nela as expressões (5.2.2.33a,34b) e, na seqüência, usando-se a expressão (5.2.2.34a), resultará [lembrar que $\rho_1(x)$ e $v_{qu1}(x)$]:

$$J_{qu1}(x) = \rho_1(x) \; v_{qu1}(x) =$$

$$= (1 + a^2 + 2 \; a \; cos \; 2 \; \theta) \; \frac{\hbar}{m} [\frac{k \; (1 - a^2)}{1 + a^2 + 2 \; a \; cos \; 2 \; \theta}] \quad \rightarrow$$

$$J_{qu1}(x) = \rho_1(x) \; v_{qu1}(x) = \frac{\hbar}{m} \; k \; (1 - a^2) \; . \qquad (5.2.2.35)$$

Analogamente, para a região 2, teremos [vide expressão (5.2.2.29)]:

$$\rho_2(x) = \frac{1}{\bar{q}} [c^2 \; e^{2 \; \bar{q} \; x} + d^2 \; e^{- \; 2 \; \bar{q} \; x} +$$

$$+ 2 \; c \; d \; cos \; (\gamma - \delta)] \; , \qquad (5.2.2.36a)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \equiv \rho_2'(x) = 2 \; (c^2 \; e^{2 \; \bar{q} \; x} - d^2 \; e^{- \; 2 \; \bar{q} \; x}) \; , \qquad (5.2.2.36b)$$

$$\mathrm{S}_2(x, \; t) = \Big(- \; \omega \; t + \frac{\gamma + \delta}{2} +$$

$$+ \, tg^{-\,1} \, [\frac{c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}}{c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}} \, tg \, (\frac{\gamma \, - \, \delta}{2})] \, \Big) \, , \qquad (5.2.2.36c)$$

$$v_{qu2}(x, \; t) \; = \; \frac{\hbar}{m} \, \frac{\partial S_2(x, \; t)}{\partial x} \; =$$

$$= \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \Big[\, - \, \omega \, t \, + \, \frac{\gamma \, + \, \delta}{2} \, + \, tg^{-\,1} \, [\frac{c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}}{c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}} tg \, (\frac{\gamma \, - \, \delta}{2})] \Big] \, .$$

Chamando-se:

$$\Theta \; = \; \frac{\gamma \, - \, \delta}{2} \, , \qquad (5.2.2.36d)$$

teremos:

$$v_{qu2}(x, \; t) \; = \; \frac{\hbar}{m} \, \frac{\partial}{\partial x} \, \Big[\, tg^{-\,1} \, (\frac{c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}}{c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}} \, tg \, \Theta) \, \Big] \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{m} \, [\frac{1}{1 \, + \, tg^2 \, \Theta \, \frac{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2}{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2}}] \, \frac{d}{dx} \, [tg \, \Theta \, (\frac{c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}}{c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}})] \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{m} \, [\frac{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2}{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2 \, + \, tg^2 \, \Theta \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2} \, \times \, tg \, \Theta \, \times$$

$$\times \, \frac{1}{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2} \, [(c \, e^{\bar{q} \, x} + d \, e^{- \, \bar{q} \, x}) \, \frac{d}{dx} \, (c \, e^{\bar{q} \, x} - d \, e^{- \, \bar{q} \, x}) \, -$$

$$- \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}) \, \frac{d}{dx} \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})] \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{m} \, [\frac{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2}{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2 \, + \, tg^2 \, \Theta \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2} \, \times \, tg \, \Theta \, \times$$

$$\times \, \frac{1}{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2} \, [\bar{q} \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}) \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}) \, -$$

$$- \, \bar{q} \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x}) \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})] \; =$$

$$= \; \frac{\hbar \, \bar{q}}{m} \, \Big(\, \frac{[(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2 \, - \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2] \, tg \, \Theta}{(c \, e^{\bar{q} \, x} \, + \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2 \, + \, tg^2 \, \Theta \, (c \, e^{\bar{q} \, x} \, - \, d \, e^{- \, \bar{q} \, x})^2} \, \Big) \; =$$

$$= \frac{\hbar\ \bar{q}}{m} \Big(\frac{1}{(c\ e^{\bar{q}\ x}\ +\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x})^2\ +\ tg^2\ \Theta\ (c\ e^{\bar{q}\ x}\ -\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x})^2} \times$$

$$\times\ [(c\ e^{\bar{q}\ x}\ +\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x})\ +\ (c\ e^{\bar{q}\ x}\ -\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x})] \times$$

$$\times\ [(c\ e^{\bar{q}\ x}\ +\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x})\ -\ (c\ e^{\bar{q}\ x}\ -\ d\ e^{-\ \bar{q}\ x})]\ tg\ \Theta \Big)\ =$$

$$= \frac{(\hbar\ \bar{q})(2\ c\ e^{\bar{q}})\ (2\ d\ e^{-\ \bar{q}})\ tg\ \Theta}{m\ [(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2 e^{-2\bar{q}x}+2cd)+(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2\ e^{-2\bar{q}x}-2cd) sen^2\Theta/cos^2\Theta]} =$$

$$= \frac{(\hbar\ \bar{q})\ 4\ c\ d\ tg\Theta}{m\ [(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2 e^{-2\bar{q}x}+2cd)+(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2 e^{-2\bar{q}x}-2cd) sen^2\Theta/cos^2\ \Theta]}] =$$

$$= \frac{(\hbar\ \bar{q})\ 4\ c\ d\ \frac{sen\ \Theta}{cos\ \Theta}\ cos^2\ \Theta}{m\ [(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2 e^{-2\bar{q}x}+2cd)\ cos^2\ \Theta+(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2 e^{-2\bar{q}x}-2cd) sen^2\Theta}] =$$

$$= \frac{(\hbar\ \bar{q})\ 4\ c\ d\ tg\ \Theta\ cos^2\ \Theta}{m\ [(c^2 e^{2\bar{q}x}+d^2 e^{-2\bar{q}x})(sen^2\Theta+cos^2\Theta)+2cd(cos^2\ \Theta-sen^2\ \Theta)]} \rightarrow$$

$$v_{qu2}\ =\ \frac{\hbar\ \bar{q}}{m}\ \times$$

$$\times\ [\frac{2\ c\ d\ 2\ sen\ \Theta\ cos\ \Theta}{c^2\ e^{2\ \bar{q}\ x}\ +\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ x}\ +\ 2\ c\ d\ (cos^2\ \Theta\ -\ sen^2\ \Theta)}]\ , \qquad (5.2.2.37)$$

Considerando-se as expressões (5.2.2.32a-b,36d,37) poderemos escrever que:

$$\mathrm{v}_{qu2}(x)\ =\ \frac{\hbar\ \bar{q}}{m}\ \times$$

$$\times\ [\frac{2\ c\ d\ sen\ (\gamma\ -\ \delta)}{c^2\ e^{2\ \bar{q}\ x}\ +\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ x}\ +\ 2\ c\ d\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)}]\ . \qquad (5.2.2.38)$$

Usando-se a expressão (5.2.2.10) e substituindo-se nela as expressões (5.2.2.36a,38), resultará [lembrar que $\rho_2(x)$ e $v_{qu2}(x)$]:

$$J_{qu2}(x)\ =\ \rho_2(x)\ v_{qu2}(x)\ =$$

$$= \frac{1}{\bar{q}} \, [c^2 \; e^{2 \; \bar{q} \; x} \; + \; d^2 \; e^{- \; 2 \; \bar{q} \; x} \; + \; 2 \; c \; d \; cos \; (\gamma \; - \; \delta)] \; \times$$

$$\times \; \frac{\hbar \; \bar{q}}{m} \; [\frac{2 \; c \; d \; sen \; (\gamma \; - \; \delta)}{c^2 \; e^{2 \; \bar{q} \; x} \; + \; d^2 \; e^{- \; 2 \; \bar{q} \; x} \; + \; 2 \; c \; d \; cos \; (\gamma \; - \; \delta)}] \quad \rightarrow$$

$$J_{qu2}(x) \; = \; \rho_2(x) \; v_{qu2}(x) \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{m} \; 2 \; c \; d \; sen \; (\gamma \; - \; \delta) \; . \qquad (5.2.2.39)$$

Analogamente, para a região 3, teremos [vide expressão (5.2.2.31)]:

$$\rho_3(x) \; = \; b^2 \; , \qquad \frac{\partial \rho_3}{\partial x} \equiv \rho_3'(x) = 0 \; , \qquad (5.2.2.40\text{a-b})$$

$$\mathrm{S}_3(x, \; t) \; = \; (- \; \omega \; t \; + \; k \; x \; + \; \beta) \; , \qquad (5.2.2.40\text{c})$$

$$v_{qu3}(x, \; t) \; = \; \frac{\hbar}{m} \; \frac{\partial S_3(x, \; t)}{\partial x} \; = \; \frac{\hbar}{m} \; \frac{\partial}{\partial x} \; (- \; \omega \; t \; + \; k \; x \; + \; \beta) \; =$$

$$= \; \frac{\hbar}{m} \; \frac{d}{dx} \; (k \; x \; + \; \beta) \quad \rightarrow$$

$$v_{qu3}(x) \; = \; \frac{\hbar}{m} \; k \; . \qquad (5.2.2.41)$$

Tomando-se a expressão (5.2.2.10) e inserindo-se nela as expressões (5.2.2.40a,41), virá [lembrar que $\rho_3(x)$ e $v_{qu3}(x)$]:

$$J_{qu3}(x) \; = \; \rho_3(x) \; v_{qu3}(x) \; = \; b^2 \; \frac{\hbar}{m} \; k \; . \qquad (5.2.2.42)$$

Fazendo-se uso das expressões (5.2.2.33a-b,35,36a-b) e (5.2.2.39,40a-b,42) e das condições de contorno representadas pelas expressões (5.2.2.14a-c), resultará [lembrar que $cos \; (- \; \alpha) \; = \; cos \; \alpha$ e $sen \; (- \; \alpha) \; = \; - \; sen \; \alpha$]:

a) Para x = 0:

$$\rho_1(0) \ = \ \rho_2(0) \quad \rightarrow \quad 1 \ + \ a^2 \ + \ 2 \ a \ cos \ \alpha \ =$$

$$= \ \frac{c^2 \ + \ d^2 \ + \ 2 \ c \ d \ cos \ (\gamma \ - \ \delta)}{\bar{q}} \ , \qquad (5.2.2.43a)$$

$$\rho_1'(0) \ = \ \rho_2'(0) \quad \rightarrow \quad 2 \ a \ k \ sen \ \alpha \ = \ c^2 \ - \ d^2 \ , \qquad (5.2.2.43b)$$

$$J_{qu1}(0) \ = \ J_{qu2}(0) \quad \equiv \quad \rho_1(0) \ v_{qu1}(0) \ = \ \rho_2(0) \ v_{qu2}(0) \quad \rightarrow$$

$$k \ (1 \ - \ a^2) \ = 2 \ c \ d \ sen \ (\gamma \ - \ \delta) \ . \qquad (5.2.2.43c)$$

b) Para x = L:

$$\rho_2(L) \ = \ \rho_3(L) \quad \rightarrow$$

$$\frac{c^2 \ e^{2 \ \bar{q} \ L} \ + \ d^2 \ e^{- \ 2 \ \bar{q} \ L} \ + \ 2 \ c \ d \ cos \ (\gamma \ - \ \delta)}{\bar{q}} \ = \ b^2 \ , \qquad (5.2.2.44a)$$

$$\rho_2'(L) \ = \ \rho_3'(L) \quad \rightarrow \quad 2 \ (c^2 \ e^{2 \ \bar{q} \ L} \ - \ d^2 \ e^{- \ 2 \ \bar{q} \ L}) \ = \ 0 \quad \rightarrow$$

$$c^2 \ = \ d^2 \ e^{- \ 4 \ \bar{q} \ L} \quad \rightarrow \quad \mathrm{c = d \ e}^{- \ 2 \ \bar{q} \ L} \ , \qquad (5.2.2.44b)$$

$$J_{qu2} \ = \ J_{qu3} \quad \equiv \quad \rho_2(L) \ v_{qu2}(L) \ = \ \rho_3(L) \ v_{qu3}(L) \quad \rightarrow$$

$$2 \ c \ d \ sen \ (\gamma \ - \ \delta) \ = \ b^2 \ k \ . \qquad (5.2.2.44c)$$

Comparando-se as expressões (5.2.2.43c) e (5.2.2.44c), virá:

$$1 \ - \ a^2 = \ b^2 \quad \rightarrow \quad a^2 \ = \ 1 \ - \ b^2 \ . \qquad (5.2.2.45)$$

Substituindo-se a expressão (5.2.2.44b) nas expressões (5.2.2.44a,c), virá:

$$\frac{d^2\ e^{-\ 4\ \bar{q}\ L}\ e^{2\ \bar{q}\ L}\ +\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ +\ 2\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)}{\bar{q}}\ =\ b^2\ \rightarrow$$

$$b^2\ =\ \frac{2}{\bar{q}}\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ [1\ +\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)]\ , \qquad (5.2.2.46a)$$

$$b^2\ =\ \frac{2}{k}\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ sen\ (\gamma\ -\ \delta)\ . \qquad (5.2.2.46b)$$

Comparando-se as expressões (5.2.2.46a-b), teremos:

$$\frac{sen\ (\gamma\ -\ \delta)}{1\ +\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)}\ =\ \frac{k}{\bar{q}}\ . \qquad (5.2.2.46c)$$

Consideremos a identidade:[6]

$$tg\ (\frac{z}{2})\ =\ \frac{sen\ z}{1\ +\ cos\ z}\ . \qquad (5.2.2.47)$$

Levando-se a expressão acima na expressão (5.2.2.46c) e usando-se a expressão (5.2.2.36d), resultará (lembrar que $tg\ \alpha\ =\ \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$):

$$tg\ (\frac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ =\ \frac{sen\ [(\gamma\ -\ \delta)/2]}{cos\ [(\gamma\ -\ \delta)/2]}\ =$$

$$=\ \frac{sen\ \Theta}{cos\ \Theta}\ =\ \frac{sen\ (\gamma\ -\ \delta)}{1\ +\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)}\ =\ \frac{k}{\bar{q}}\ . \qquad (5.2.2.48)$$

Partindo-se da expressão (5.2.2.48) e usando-se as expressões (5.2.2.32a-b,36d), teremos:

$$\frac{sen^2\ \Theta}{cos^2\ \Theta}\ =\ \frac{k^2}{\bar{q}^2}\ \rightarrow\ \frac{sen^2\ \Theta\ +\ cos^2\ \Theta}{sen^2\ \Theta}\ =\ \frac{1}{sen^2\ \Theta}\ =\ \frac{k^2\ +\ \bar{q}^2}{k^2}\ \rightarrow$$

$$sen\ \Theta\ =\ sen\ (\frac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ =\ \frac{k}{\sqrt{k^2\ +\ \bar{q}^2}}\ , \qquad (5.2.2.49a)$$

$$\frac{sen^2\ \Theta}{cos^2\ \Theta}\ =\ \frac{k^2}{\bar{q}^2}\ \rightarrow\ \frac{sen^2\ \Theta\ +\ cos^2\ \Theta}{cos^2\ \Theta}\ =\ \frac{1}{cos^2\ \Theta}\ =\ \frac{k^2\ +\ \bar{q}^2}{\bar{q}^2}\ \rightarrow$$

$$cos\ \Theta\ =\ cos\ (\tfrac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ =\ \frac{\bar{q}}{\sqrt{k^2\ +\ \bar{q}^2}}\ , \qquad (5.2.2.49b)$$

$$cos\ 2\ \Theta\ =\ cos^2\ \Theta\ -\ sen^2\ \Theta\ =\ \frac{\bar{q}^2}{k^2\ +\ \bar{q}^2}\ -\ \frac{k^2}{k^2\ +\ \bar{q}^2}\ \ \rightarrow$$

$$cos\ 2\ \Theta\ =\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)\ =\ \frac{\bar{q}^2\ -\ k^2}{\bar{q}^2\ +\ k^2}\ . \qquad (5.2.2.50)$$

Considerando-se a expressão (5.2.2.46a) e levando-se nela a expressão (5.2.2.50), virá:

$$b^2\ =\ \tfrac{2}{\bar{q}}\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ (1\ +\ \tfrac{\bar{q}^2\ -\ k^2}{\bar{q}^2\ +\ k^2})\ \ \rightarrow$$

$$b^2\ =\ (\tfrac{4\ \bar{q}}{\bar{q}^2\ +\ k^2})\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ . \qquad (5.2.2.51)$$

Tomando-se a expressão (5.2.2.43a), substituindo-se nela as expressões (5.2.2.44b,50)e, usando-se as expressões (5.2.1.12a) e (5.2.2.51), resultará:

$$1\ +\ a^2\ +\ 2\ a\ cos\ \alpha\ =$$

$$=\ \frac{d^2\ e^{-\ 4\ \bar{q}\ L}\ +\ d^2\ +\ 2\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ (\frac{\bar{q}^2\ -\ k^2}{\bar{q}^2\ +\ k^2})}{\bar{q}}\ =$$

$$=\ \tfrac{1}{\bar{q}}\ d^2\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ [e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}\ +\ e^{2\ \bar{q}\ L}\ +\ 2\ (\tfrac{\bar{q}^2\ -\ k^2}{\bar{q}^2\ +\ k^2})]\ =$$

$$=\ \frac{b^2\ (\bar{q}^2\ +\ k^2)}{2\ \bar{q}^2}\ [cosh(2\ \bar{q}\ L) + (\tfrac{\bar{q}^2\ -\ k^2}{\bar{q}^2 + k^2})]\ =$$

$$=\ \frac{b^2\ (\bar{q}^2\ +\ k^2)}{2\ \bar{q}^2}(\tfrac{\bar{q}^2\ -\ k^2}{\bar{q}^2\ +\ k^2})[(\tfrac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{\bar{q}^2\ -\ k^2})\ cosh(2\ \bar{q}\ L) + 1]\ \ \rightarrow$$

$$1\ +\ a^2\ +\ 2\ a\ cos\ \alpha\ =$$

$$=\ \frac{b^2\ (\bar{q}^2\ -\ k^2)}{2\ \bar{q}^2}\ [(\tfrac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{\bar{q}^2\ -\ k^2})\ cosh\ (2\ \bar{q}\ \mathrm{L})\ +\ 1]\ . \qquad (5.2.2.52)$$

Considerando-se a expressão (5.2.2.52) e inserindo-se nela a expressão (5.2.2.45) e usando-se a expressão (5.2.1.12b), teremos:

$$2 \ - \ b^2 \ + \ 2 \ a \ cos \ \alpha \ =$$

$$= \ b^2 \ [\tfrac{\bar{q}^2 \ - \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ + \ (\tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2}) \ cosh \ (2 \ \bar{q} \ L)] \quad \rightarrow$$

$$2 \ + \ 2 \ a \ cos \ \alpha \ =$$

$$= \ b^2 \ [1 \ + \ \tfrac{\bar{q}^2 \ - \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ + \ (\tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2}) \ cosh \ (2 \ \bar{q} \ L)] \ =$$

$$= \ b^2 \ \Big(\ 1 \ + \ \tfrac{\bar{q}^2 \ - \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ + \ (\tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2}) \ [1 \ + \ 2 \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ \Big) \ =$$

$$= \ b^2 \ [1 \ + \ \tfrac{\bar{q}^2 \ - \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ + \ \tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ + \ \tfrac{2 \ (\bar{q}^2 \ + \ k^2)}{2 \ \bar{q}^2} \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ =$$

$$= \ b^2 \ [1 \ + \ 1 \ + \ \tfrac{2 \ (\bar{q}^2 \ + \ k^2)}{2 \ \bar{q}^2} \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ =$$

$$= \ 2 \ b^2 \ [1 \ + \ \tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ \rightarrow$$

$$a \ cos \ \alpha \ = \ b^2 \ [1 \ + \ \tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ - \ 1 \ . \qquad (5.2.2.53)$$

Usando-se as expressões (5.2.1.15a) e (5.2.2.43b,44b,51), virá:

$$2 \ a \ k \ sen \ \alpha \ = \ c^2 \ - \ d^2 \ = \ d^2 \ e^{- \ 4 \ \bar{q} \ L} \ - \ d^2 \ =$$

$$= \ d^2 \ (e^{- \ 4 \ \bar{q} \ L} \ - \ 1) \ = \ \tfrac{b^2 \ (\bar{q}^2 \ + \ k^2)}{4 \ \bar{q}} \ e^{2 \ \bar{q} \ L} \ (e^{- \ 4 \ \bar{q} \ L} \ - \ 1) \ =$$

$$= \ \tfrac{b^2 \ (\bar{q}^2 \ + \ k^2)}{4 \ \bar{q}} \ (e^{- \ 2 \ \bar{q} \ L} \ - \ e^{2 \ \bar{q} \ L}) \quad \rightarrow$$

$$a\ k\ sen\ \alpha\ =\ -\ \frac{b^2\ (\bar{q}^2\ +\ k^2)}{4\ \bar{q}}\ (\frac{e^{2\ \bar{q}\ L}\ -\ e^{-\ 2\ \bar{q}\ L}}{2})\quad \rightarrow$$

$$a\ sen\ \alpha\ =\ -\ \frac{b^2\ (\bar{q}^2\ +\ k^2)}{4\ \bar{q}\ k}\ senh\ (2\ \bar{q}\ L)\ . \qquad (5.2.2.54)$$

Elevando-se ao quadrado as expressões (5.2.2.53-54), em seguida somando-se os resultados, e usando-se a expressão (5.2.2.45), obteremos:

$$a^2\ (cos^2\ \alpha\ +\ sen^2\ \alpha)\ =$$

$$=\ \Big(\ b^2\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]\ -\ 1\ \Big)^2\ +$$

$$+\ b^4\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{4\ \bar{q}\ k})^2\ senh^2\ (2\ \bar{q}\ L)\quad \rightarrow$$

$$a^2\ =\ b^4\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]^2\ +$$

$$+\ 1\ -\ 2\ b^2\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]\ +$$

$$+\ b^4\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{4\ \bar{q}\ k})^2\ senh^2\ (2\ \bar{q}\ L)\quad \rightarrow$$

$$a^2\ -\ 1\ =\ -\ b^2\ =\ b^4\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]^2\ -$$

$$-\ 2\ b^2\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]\ +$$

$$+\ b^4\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{4\ \bar{q}\ k})^2\ senh^2\ (2\ \bar{q}\ L)\quad \rightarrow$$

$$-\ 1\ =\ b^2\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]^2\ -$$

$$-\ 2\ [1\ +\ (\frac{\bar{q}^2\ +\ k^2}{2\ \bar{q}^2})\ senh^2\ (\bar{q}\ L)]\ +$$

$$+ \, b^2 \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{4 \, \bar{q} \, k})^2 \, senh^2 \, (2 \, \bar{q} \, L) \quad \rightarrow$$

$$b^2 \, \Big(\, [1 \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{2 \, \bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)]^2 \, +$$

$$+ \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{4 \, \bar{q} \, k})^2 \, senh^2 \, (2 \, \bar{q} \, L) \, \Big) \, =$$

$$= \, 2 \, [1 \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{2 \, \bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)] \, - \, 1 \, =$$

$$= \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{\bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L) \, + \, 1 \quad \rightarrow$$

$$[1 \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{2 \, \bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)]^2 \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{4 \, \bar{q} \, k})^2 \, senh^2 \, (2 \, \bar{q} \, L) \, =$$

$$= \, b^{- \, 2} \, [1 \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{\bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)] \quad \rightarrow$$

$$b^{- \, 2} \, = \, \frac{1}{1 \, + \, (\frac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{\bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)} \, \Big(\, [1 + (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{2 \, \bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)]^2 \, +$$

$$+ \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{4 \, \bar{q} \, k})^2 \, senh^2 \, (2 \, \bar{q} \, L) \, \Big) \, . \qquad (5.2.2.55)$$

Por fim, usando-se a identidade trigonométrica:[6]

$$senh^2 \, \alpha \, = \, 4 \, (sen^2 \, \alpha \, + \, senh^4 \, \alpha) \, , \qquad (5.2.2.56)$$

a expressão (5.2.2.55) ficará:

$$b^{- \, 2} \, = \, \frac{1}{1 \, + \, (\frac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{\bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L)} \, [\, 1 \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{\bar{q}^2}) \, senh^2 \, (\bar{q} \, L) \, +$$

$$+ \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{2 \, \bar{q}^2})^2 \, senh^4 \, (\bar{q} \, L) \, + \, (\tfrac{\bar{q}^2 \, + \, k^2}{4 \, \bar{q} \, k})^2 \, senh^2 \, (2 \, \bar{q} \, L) \,] \, =$$

$$= \frac{1}{1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)} \Big(1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) +$$

$$+ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ \bar{q}^2})^2 \ senh^4 \ (\bar{q} \ L) +$$

$$+ \frac{1}{4} \ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ \bar{q} \ k})^2 \ 4 \ [senh^2(\bar{q} \ L) \ + \ senh^4 \ (\bar{q} \ L)] \Big) =$$

$$= \frac{1}{1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)} \Big(1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) +$$

$$+ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ k \ \bar{q}})^2 \ \frac{k^2}{\bar{q}^2} \ senh^4 \ (\bar{q} \ L) +$$

$$+ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ \bar{q} \ k})^2 \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) \ [1 \ + \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \Big) =$$

$$= \frac{1}{1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)} \Big(1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) +$$

$$+ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ k \ \bar{q}})^2 \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) \ [1 + senh^2(\bar{q} \ L) + \frac{k^2}{\bar{q}^2} \ senh^2(\bar{q} \ L)] \Big) =$$

$$= \frac{1}{1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)} \Big(1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) +$$

$$+ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ k \ \bar{q}})^2 \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) \ [1 \ + \ senh^2(\bar{q} \ L) \ (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2})] \Big) =$$

$$= \frac{[1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ [1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{2 \ k \ \bar{q}})^2 \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)]}{1 + (\frac{\bar{q}^2 + k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)} \quad \rightarrow$$

$$b^{-\,2} \ = \ 1 \ + \ \frac{(\bar{q}^2 + k^2)^2}{4 \ k^2 \ \bar{q}^2} \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)] \ , \qquad (5.2.2.57)$$

que é o <u>mesmo resultado</u> que já havíamos encontrado no item 5.2.1., ou seja, a expressão (5.2.1.13).

5.3. **Tunelamento Quântico em Sistemas Não-Conservativos**

Neste item, estudaremos o **tunelamento quântico em sistemas não-conservativos**, utilizando-se a Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$), estudada no Capítulo 1.

5.3.1. Tunelamento Quântico Não-Conservativo Via Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

Vamos resolver, neste item, o mesmo problema resolvido nos itens 5.2.1,2., qual seja, o **tunelamento quântico** de um fluxo estacionário de partículas com energia E, através de uma barreira de potencial de altura V e largura L [vide expressões (5.2.1.2a-b)], usando-se a $MQBB$. O meio não-conservativo no qual estudaremos esse tunelamento, será representado por um tipo de **equação de Schrödinger não-linear**, a conhecida **equação de Kostin**. Os principais resultados necessários para o estudo desse item foram obtidos no item 1.3.1., e são os que mostraremos a seguir.

Seja a **equação de Kostin** dada por [vide expressão (1.3.1.1)]:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial x^2} \;+$$

$$+\;[V(x,\ t)\;+\;\frac{\hbar\ \nu}{2\ i}\,\ell n\,\frac{\psi(x,\ t)}{\psi^*(x,\ t)}]\;\psi(x,\ t)\ , \qquad (5.3.1.1)$$

onde $\psi(x,\ t)$ e $V(x,\ t)$ representam como nos casos anteriores, a função de onda e o potencial dependente do sistema físico em estudo, e ν representa uma constante de dissipação.

Consideremos a função de onda $\psi(x,\ t)$ na forma polar ou **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (1.2.1.2)]:

$$\psi(x,\ t)\;=\;\phi(x,\ t)\;e^{i\ S(x,\ t)}. \qquad (5.3.1.2)$$

Levando-se a expressão (5.3.1.2) na expressão (5.3.1.1), demonstramos no Capítulo 1 as seguintes expressões [vide expressões (1.3.1.5,6b,7-8)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho\ v_{qu})}{\partial x} = 0 , \qquad (5.3.1.3)$$

$$\hbar\ (\frac{\partial S}{\partial t} + \nu\ S) + (\frac{1}{2}\ m\ v_{qu}^2 + V + V_{qu}) = 0 , \qquad (5.3.1.4)$$

$$\frac{\partial J_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial P_{qu}}{\partial x} + \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial x} = -\ \nu\ J_{qu} , \qquad (5.3.1.5)$$

$$\frac{\partial U_{qu}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{qu}}{\partial x} - \frac{\rho}{m}\ \frac{\partial V}{\partial t} = -\ \nu\ J_{qu}\ v_{qu} , \qquad (5.3.1.6)$$

onde ρ, v_{qu}, V_{qu}, J_{qu}, P_{qu}, U_{qu} e Q_{qu} indicam, respectivamente, a **densidade de massa**, a **velocidade quântica**, o **potencial quântico**, a **densidade de momento linear quântico**, o **fluxo da densidade de momento linear quântico**, a **densidade de energia quântica** e o **fluxo da densidade de energia quântica** e foram definidos, de modo respectivo, pelas expressões (5.2.2.5-6,7a-b,10-13).

Assim, para o estudo do tunelamento que iremos realizar, as condições de fronteira corretas são determinadas por intermédio da integração das expressões (5.3.1.3,5-6) sobre uma superfície infinitesimal fechada nas fronteiras (σ) da barreira de potencial.[7] Desse modo, teremos que:

$$\rho \ \Leftrightarrow \ \psi^*\ \psi , \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} \ \Leftrightarrow \ \psi^*\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad (5.3.1.7a\text{-}b)$$

$$J_{qu} = \rho\ v_{qu} , \qquad (5.3.1.7c)$$

$$\frac{1}{2}\ m\ v^2 + V + V_{qu} \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial S}{\partial t} + \nu\ S , \qquad (5.3.1.7d)$$

devem ser contínuas em σ, sendo as equivalências indicadas nessas expressões decorrentes, respectivamente, das expressões

(1.2.1.7), (1.2.1.8) e (5.3.1.4). É oportuno destacar que a expressão (5.3.1.7d) nos mostra que S, e, portanto, a função de onda ψ [vide expressão (5.3.1.2)], não é contínua nas fronteiras da barreira de potencial em questão.

Considerando-se que nas regiões 1 (de incidência) e 3 (de transmissão), $\nu = 0$, então, em analogia com o item 5.2.2., podemos escrever que [lembrar que, em virtude de a barreira ser dissipativa, ω e k não serão os mesmos para as "ondas debroglieanas" incidente e transmitida, e lembrar, também, das expressões (5.2.2.27,31)]:

$$\psi_1(x,\ t) \ = \ \sqrt{\rho_1}\ e^{i\ S_1} \ =$$

$$= \ \sqrt{1 \ + \ a^2 \ + \ 2\ a\ cos\ (2\ k_1\ x \ - \ \alpha)} \ \times exp\left[\ i\ \Big(- \ \omega_1\ t + \right.$$

$$\left. + \ \tfrac{\alpha}{2} \ + \ tg^{-\ 1}\ [\tfrac{1\ -\ a}{1\ +\ a}\ tg\ (k_1\ x \ - \ \tfrac{\alpha}{2})] \ \Big) \ \right]\ , \qquad (5.3.1.8)$$

$$\psi_3(x,\ t) \ = \ \sqrt{\rho_3}\ e^{i\ S_3} \ =$$

$$= \ \sqrt{b^2}\ exp\ [i\ (-\ \omega_3\ t \ + \ k_3\ x \ + \ \beta)]\ . \qquad (5.3.1.9)$$

Para obtermos a função de onda ψ_2 na barreira dissipativa, deveremos resolver a **equação de Kostin** [vide expressão (5.3.1.1)]. Para isso, inicialmente, apliquemos a condição de continuidade [expressão (5.3.1.7d)] aos limites da barreira dissipativa. Assim, teremos:

$$(\tfrac{\partial S_1}{\partial t})_{x=0} \ = \ [(\tfrac{\partial S_2}{\partial t}) \ + \ \nu\ S_2]_{x=0}\ , \qquad (5.3.1.10)$$

$$[(\tfrac{\partial S_2}{\partial t}) \ + \ \nu\ S_2]_{x=L} \ = \ (\tfrac{\partial S_3}{\partial t})_{x=L}\ . \qquad (5.3.1.11)$$

Usando-se as expressões (5.3.1.8-11) e considerando-se o estado de regime estacionário no interior da barreira ($t \ \rightarrow \ \infty$, $\frac{\partial S_2}{\partial t} \ = \ 0$), podemos escrever que:

$$lim_{t \to \infty} \frac{\partial}{\partial t} \Big(- \omega_1 \ t \ + \ \frac{\alpha}{2} +$$

$$+ \ tg^{- \ 1} \ [\frac{1 \ - \ a}{1 \ + \ a} \ tg \ (k_1 \ x \ - \ \frac{\alpha}{2})] \Big)_{x=0} \ = \ (- \ \omega_1)_{x=0} \ =$$

$$lim_{t \to \infty} \ [(\frac{\partial S_2}{\partial t}) \ + \ \nu \ S_2]_{x=0} \ = \ (\nu \ S_2)_{x=0} \ \ \to$$

$$(- \ \omega_1)_{x=0} \ = \ (\nu \ S_2)_{x=0} \ \ \to$$

$$S_2(x = 0) \ = \ S_2(0) \ = \ - \ \frac{\omega_1}{\nu} \ . \qquad (5.3.1.12)$$

Analogamente, teremos:

$$(\nu \ S_2)_{x=L} \ = \ (- \ \omega_3)_{x=L} \ \ \to$$

$$S_2(x = L) \ = \ S_2(L) \ = \ - \ \frac{\omega_3}{\nu} \ . \qquad (5.3.1.13)$$

As expressões acima nos mostram que a perda de energia ($E \ = \ \hbar \ \omega$) na barreira será:

$$E_3 \ - \ E_1 \ = \ \hbar \ (\omega_3 \ - \ \omega_1) \ =$$

$$= \ - \ \hbar \ \nu[S_2(L) \ - \ S_2(0)] \ . \qquad (5.3.1.14)$$

Considerando-se a primeira **aproximação de Taylor** e a expressão (5.3.1.12), podemos escrever que:

$$S_2(x) \ = \ S_2(0) \ + \ \Delta S_2(x) \ = \ - \ \frac{\omega_1}{\nu} \ + \ \Delta S_2(x) \ . \quad (5.3.1.15)$$

Tomando-se a expressão (5.3.1.15) e usando-se nela as expressões (5.3.1.12-13), resultará:

$$S_2(0) \ = \ - \ \frac{\omega_1}{\nu} \ = \ - \ \frac{\omega_1}{\nu} \ + \ \Delta S_2(0) \ \ \to$$

$$\Delta S_2(0) \ = \ 0 \ , \qquad (5.3.1.16)$$

$$S_2(L) \ = \ - \ \frac{\omega_3}{\nu} \ = \ - \ \frac{\omega_1}{\nu} \ + \ \Delta S_2(L) \ \ \rightarrow$$

$$\Delta S_2(L) \ = \ \frac{\omega_1 \ - \ \omega_3}{\nu} \ . \qquad (5.3.1.17)$$

Considerando-se a expressão (5.3.1.1) e inserindo-se nela a expressão (5.3.1.15), teremos (lembrar que, no interior da barreira, $\frac{\partial S_2}{\partial t} \ = \ 0$):

$$i \ \hbar \ \frac{\partial \psi_2(x, \ t)}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2 \psi_2(x, \ t)}{\partial x^2} \ +$$

$$+ \ [V \ + \ \hbar \ \nu \ S_2(x, \ t)] \ \psi(x, \ t) \ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2(x)}{\partial x^2} \ - \ \frac{2 \ m}{\hbar^2} \ \Big(\ V \ + \ \hbar \ \nu \ [- \ \frac{\omega_1}{\nu} \ + \ \Delta \ S_2(x)] \ \Big) \ \psi(x) \ = \ 0 \ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2(x)}{\partial x^2} \ - \ \frac{2 \ m}{\hbar^2} \ [V \ - \ \hbar \ \omega_1 \ + \ \hbar \ \nu \ \Delta \ S_2(x)] \ \psi(x) \ = \ 0 \ \ \rightarrow$$

$$\psi_2''(x) \ - \ \bar{Q}^2 \ \psi_2(x) = 0 \ , \qquad (5.3.1.18a)$$

onde (lembrar que $E_1 \ = \ \hbar \ \omega_1$):

$$\bar{Q}^2(x) \ = \ \frac{2 \ m}{\hbar^2} \ [V \ - \ E_1 \ + \ \hbar \ \nu \ \Delta \ S_2(x)] \ . \qquad (5.3.1.18b)$$

Em analogia com o item 5.2.2., podemos propor a seguinte solução para a equação representada pela expressão (5.3.1.18a) [vide expressão (5.2.2.29)]:

$$\psi_2(x) \ = \ \sqrt{\rho_2} \ e^{i \ S_2} \ =$$

$$= \ \Big(\ \frac{1}{\bar{Q}(x)} \ [c^2 \ exp(2 \ \int_o^x \ \bar{Q} \ dx) \ + \ d^2 \ exp(- \ 2 \ \int_o^x \ \bar{Q} \ dx) \ +$$

$$+ 2\ c\ d\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)]\ \Big)^{1/2} \times exp \Big[\ i\ \Big(\ \frac{\gamma\ +\ \delta}{2} +$$

$$+\ tg^{-\ 1} \Big[\ \frac{c\ exp(\int_o^x \bar{Q}\ dx)\ -\ d\ exp(-\ \int_o^x \bar{Q}\ dx)}{c\ exp(\int_o^x \bar{Q}\ dx)\ +\ d\ exp(-\ \int_o^x \bar{Q}\ dx)} \times$$

$$\times\ tg\ (\frac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ \Big]\ \Big)\ \Big]\ . \qquad (5.3.1.19)$$

Agora, de posse das funções de onda das três regiões [vide expressões (5.3.1.8-9,19)] e, em analogia com o item 5.2.2., vamos aplicar as condições de contorno indicadas pelas expressões (5.3.1.7a-c). Desse modo, obteremos [vide expressões (5.2.2.43a-c,44a-c)]:

$$\rho_1(0)\ =\ \rho_2(0)\ \ \rightarrow\ \ 1\ +\ a^2\ +\ 2\ a\ cos\ \alpha\ =$$

$$=\ \frac{c^2\ +\ d^2\ +\ 2\ c\ d\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)}{\bar{Q}(0)}\ , \qquad (5.3.1.20a)$$

$$\rho_1'(0)\ =\ \rho_2'(0)\ \ \rightarrow\ \ 2\ a\ k_1\ sen\ \alpha\ =\ c^2\ -\ d^2\ , \qquad (5.3.1.20b)$$

$$J_{qu1}(0)\ =\ J_{qu2}(0)\ \ \equiv\ \ \rho_1(0)\ v_{qu1}(0)\ =\ \rho_2(0)\ v_{qu2}(0)\ \ \rightarrow$$

$$k_1\ (1\ -\ a^2)\ = 2\ c\ d\ sen\ (\gamma\ -\ \delta)\ , \qquad (5.3.1.20c)$$

$$\rho_2(L)\ =\ \rho_3(L)\ \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{\bar{Q}(L)}\ \Big[\ c^2\ exp(2\ \int_o^L \bar{Q}\ dx)\ +\ d^2\ exp(-\ 2\ \int_o^L \bar{Q}\ dx)\ +$$

$$+\ 2\ c\ d\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)\ \Big]\ =\ b^2\ , \qquad (5.3.1.21a)$$

$$\rho_2'(L)\ =\ \rho_3'(L)\ \ \rightarrow$$

$$2\ [c^2\ exp(2\ \textstyle\int_o^L\ \bar{Q}\ dx)\ -\ d^2\ exp(-\ 2\ \int_o^L\ \bar{Q}\ dx)]\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$c^2\ =\ d^2\ exp(-\ 4\ \textstyle\int_o^L\ \bar{Q}\ dx)\ \ \rightarrow$$

$$c\ =\ d\ exp(-\ 2\ \textstyle\int_o^L\ \bar{Q}\ dx)\ . \qquad (5.3.1.21b)$$

$$J_{qu2}(L)\ =\ J_{qu3}(L)\ \equiv\ \rho_2(L)\ v_{qu2}(L)\ =\ \rho_3(L)\ v_{qu3}(L)\ \ \rightarrow$$

$$2\ c\ d\ sen\ (\gamma\ -\ \delta)\ =\ b^2\ k_3\ . \qquad (5.3.1.21c)$$

Continuando a analogia com o item 5.2.2., escreveremos que [vide expressões (5.2.2.45,46a-b,48,49a-b,50-51)]:

$$1\ -\ a^2\ =\ \tfrac{k_3}{k_1}\ b^2\ , \qquad (5.3.1.22)$$

$$b^2\ =\ \tfrac{2}{\bar{Q}(L)}\ d^2\ exp(-\ 2\ \textstyle\int_o^L\ \bar{Q}\ dx)\ \times$$

$$\times\ [1\ +\ cos\ (\gamma\ -\ \delta)]\ , \qquad (5.3.1.23a)$$

$$b^2\ =\ \tfrac{2}{k_3}\ d^2\ exp(-\ 2\ \textstyle\int_o^L\ \bar{Q}\ dx)\ sen\ (\gamma\ -\ \delta)\ , \qquad (5.3.1.23b)$$

$$tg\ (\tfrac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ =\ \tfrac{k_3}{\bar{Q}(L)}\ , \qquad (5.3.1.24a)$$

$$sen\ (\tfrac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ =\ \frac{k_3}{\sqrt{k_3^2\ +\ \bar{Q}^2(L)}}\ , \qquad (5.3.1.24b)$$

$$\cos\ (\tfrac{\gamma\ -\ \delta}{2})\ =\ \frac{\bar{Q}(L)}{\sqrt{k_3^2\ +\ \bar{Q}^2(L)}}\ , \qquad (5.3.1.25a)$$

$$cos\ (\gamma\ -\ \delta)\ =\ \frac{\bar{Q}^2(L)\ -\ k_3^2}{\bar{Q}^2(L)\ +\ k_3^2}\ , \qquad (5.3.1.25b)$$

$$\mathrm{b}^2\ =\ (\tfrac{4\ \bar{Q}(L)}{\bar{Q}^2(L)\ +\ k_3^2})\ d^2\ exp(-\ 2\ \textstyle\int_o^L\ \bar{Q}\ dx)\ . \qquad (5.3.1.26)$$

Seguindo ainda a analogia com o item 5.2.2., teremos [vide expressão (5.2.2.52-54)]:

$$1 \; + \; a^2 \; + \; 2 \; a \; cos \; \alpha \; = \; \frac{b^2 \; [\bar{Q}^2(L) \; - \; k_3^2]}{2 \; \bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \; \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\bar{Q}^2(L) \; + \; k_3^2}{\bar{Q}^2(L) \; - \; k_3^2} \right) cosh \; (2 \int_o^L \bar{Q} \; \mathrm{dx}) + 1 \right] , \qquad (5.3.1.27)$$

$$a \; cos \; \alpha \; = \; \frac{b^2}{2} \left(\frac{k_3}{k_1} \; + \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\bar{Q}^2(L) \; + \; k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \right] senh^2 \; (\int_o^L \bar{Q} \; \mathrm{dx}) \right) - 1 \; , \qquad (5.3.1.28)$$

$$a \; sen \; \alpha \; =$$

$$= \; - \left(\frac{b^2 \; [\bar{Q}^2(L) \; + \; k_3^2]}{4 \; \bar{Q}(L) \; k_1} \right) senh \; (2 \int_o^L \bar{Q} \; dx) \; . \qquad (5.3.1.29)$$

Quadrando-se as expressões (5.3.1.28-29), em seguida somando-se os resultados, e usando-se a expressão (5.3.1.22), resultará:

$$a^2 \; (cos^2 \; \alpha \; + \; sen^2 \; \alpha) \; =$$

$$= \left[\frac{b^2}{2} \left(\frac{k_3}{k_1} + \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} + \left[\frac{\bar{Q}^2(L) \; + \; k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \right] senh^2 \; (\int_o^L \bar{Q} \; dx) \right) - 1 \right]^2 +$$

$$+ \; b^4 \left[\frac{\bar{Q}^2(L) \; + \; k_3^2}{4 \; \bar{Q}(L) \; k_1} \right]^2 senh^2 \; (2 \int_o^L \bar{Q} \; dx) \quad \rightarrow$$

$$a^2 \; = \; 1 \; - \; \frac{k_3}{k_1} \; b^2 \; =$$

$$= \frac{b^4}{4} \left(\frac{k_3}{k_1} \; + \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \left[\frac{\bar{Q}^2(L) \; + \; k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \right] senh^2 \; (\int_o^L \bar{Q} \; dx) \right)^2 + 1 \; -$$

$$- \, b^2 \left(\frac{k_3}{k_1} \; + \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \; \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \right) +$$

$$+ \, b^4 \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{4 \; \bar{Q}(L) \; k_1} \, \right]^2 senh^2 \, (2 \, \textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \rightarrow$$

$$- \, \frac{k_3}{k_1} \; = \; \frac{b^2}{4} \left(\, \frac{k_3}{k_1} \; + \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \right.$$

$$\left. + \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \right)^2 - \; \frac{k_3}{k_1} \; - \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; -$$

$$\left. - \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \right) +$$

$$+ \, b^2 \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{4 \; \bar{Q}(L) \; k_1} \, \right]^2 senh^2 \, (2 \, \textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \rightarrow$$

$$\frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \; \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \; =$$

$$= \; \frac{b^2}{4} \left(\, \frac{k_3}{k_1} \; + \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \; \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \right)^2 +$$

$$+ \, b^2 \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{4 \; \bar{Q}(L) \; k_1} \, \right]^2 senh^2 \, (2 \, \textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \rightarrow$$

$$\frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \; \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \; =$$

$$= \; b^2 \left[\, \frac{1}{4} \left(\, \frac{k_3}{k_1} \; + \; \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} \; + \; \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{\bar{Q}(L) \; \bar{Q}(0)} \, \right] senh^2 \, (\textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\, \frac{\bar{Q}^2(L) \, + \, k_3^2}{4 \; \bar{Q}(L) \; k_1} \, \right]^2 senh^2 \, (2 \, \textstyle\int_o^L \, \bar{Q} \; dx) \right] \; \rightarrow$$

$$b^{-2} = \frac{1}{\frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)} + \left[\frac{\bar{Q}^2(L) + k_3^2}{\bar{Q}(L)\ \bar{Q}(0)}\right] senh^2\ (\int_o^L \bar{Q}\ dx)} \times$$

$$\times \Bigg[\Big(\frac{1}{2}\Big[\frac{k_3}{k_1} + \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)}\Big] + \frac{1}{2}\Big[\frac{\bar{Q}^2(L) + k_3^2}{\bar{Q}(L)\ \bar{Q}(0)}\Big] senh^2\ (\int_o^L \bar{Q}\ dx) \Big)^2 +$$

$$+ \Big[\frac{\bar{Q}^2(L) + k_3^2}{4\ \bar{Q}(L)\ k_1}\Big]^2 senh^2\ (2 \int_o^L \bar{Q}\ dx) \Bigg] . \qquad (5.3.1.30)$$

Chamando-se:

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{k_3}{k_1} + \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)}\right], \quad B = \frac{1}{2}\frac{\bar{Q}^2(L) + k_3^2}{\bar{Q}(L)\ \bar{Q}(0)}, \quad (5.3.1.31a\text{-}b)$$

$$C = \left[\frac{\bar{Q}^2(L) + k_3^2}{4\ \bar{Q}(L)\ k_1}\right]^2, \qquad D = \frac{\bar{Q}(L)}{\bar{Q}(0)}, \qquad (5.3.1.31c\text{-}d)$$

$$\alpha = \int_o^L \bar{Q}(x)\ dx , \qquad (5.3.1.31e)$$

a expressão (5.3.1.30) será escrita na forma:

$$b^{-2} = \frac{(A + B\ senh^2\ \alpha)^2 + C\ senh^2\ (2\ \alpha)}{D + 2\ B\ senh^2\ \alpha} . \qquad (5.3.1.32)$$

Tomando-se a expressão (5.3.1.32) e substituindo-se nela a expressão (5.2.2.56), e considerando-se que [vide expressões (5.3.1.31b-c)]:

$$B = \frac{1}{2}\frac{\bar{Q}^2(L) + k_3^2}{\bar{Q}(L)\ k_1} \cdot \frac{k_1}{\bar{Q}(0)} \quad \rightarrow$$

$$B^2 = 4\ C\ \frac{k_1^2}{\bar{Q}^2(0)} , \qquad (5.3.1.33)$$

teremos:

$$b^{-2} = \frac{A^2 + B^2\ senh^4\ \alpha + 2\ A\ B\ senh^2\ \alpha + C\ senh^2\ (2\ \alpha)}{D + 2\ B\ senh^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{A^2 + B^2 \, senh^4 \, \alpha + 2 \, A \, B \, senh^2 \, \alpha + 4 \, C \, (senh^2 \, \alpha + senh^4 \, \alpha)}{D + 2 \, B \, senh^2 \, \alpha} =$$

$$= \frac{1}{D + 2 \, B \, senh^2 \, \alpha} [A^2 + 2 \, A \, B \, senh^2 \, \alpha + 4 \, C \, \frac{k_1^2}{\bar{Q}^2(0)} \, senh^4 \, \alpha +$$

$$+ 4 \, C \, senh^2 \, \alpha \, (1 + senh^2 \, \alpha)] \quad \rightarrow$$

$$b^{-\,2} = \frac{1}{D + 2 \, B \, senh^2 \, \alpha} [A^2 + 2 \, A \, B \, senh^2 \, \alpha + 4 \, C \, senh^2 \, \alpha \, \times$$

$$\times \, (\frac{k_1^2}{\bar{Q}^2(0)} \, senh^2 \, \alpha + 1 + senh^2 \, \alpha)] \quad \rightarrow$$

$$b^{-\,2} = \frac{1}{D + 2 \, B \, senh^2 \, \alpha} \Big(A^2 + 2 \, A \, B \, senh^2 \, \alpha +$$

$$+ 4 \, C \, senh^2 \, \alpha \, [1 + senh^2 \, \alpha \, (1 + \frac{k_1^2}{\bar{Q}^2(0)})] \Big) \, . \qquad (5.3.1.34)$$

A expressão acima, que representa o cálculo do coeficiente de tunelamento através de uma barreira dissipativa, depende do conhecimento de $\bar{Q}$(x) [vide expressão (5.3.1.18b)] que, contudo, depende de $\Delta S_2(x)$ [vide expressão (5.3.1.15)], ou seja:

$$\bar{Q}^2(x) = \frac{2 \, m}{\hbar^2} \, [V - E_1 + \hbar \, \nu \, \Delta \, S_2(x)] \, , \qquad (5.3.1.35a)$$

$$\Delta S_2(x) = S_2(x) - S_2(0) = S_2(x) - \frac{\omega_1}{\nu} \, . \qquad (5.3.1.35b\text{-}c)$$

Para efeito operacional, é necessário obter $\bar{Q}$(x) em função dos parâmetros (L, V) da barreira. Desse modo, usando-se o valor de $S_2)x)$ obtido da expressão (5.3.1.19) e mais as expressões (5.3.1.21b,24a), teremos:

$$S_2(x) = \frac{\gamma + \delta}{2} +$$

$$+ \, tg^{-\,1}\left(\frac{d\, e^{-\,2\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_o^x \bar{Q}\,dx} \,-\, d\, e^{-\int_o^x \bar{Q}\,dx}}{d\, e^{-\,2\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_o^x \bar{Q}\,dx} \,+\, d\, e^{-\int_o^x \bar{Q}\,dx}} \left[\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}\right] \right) .$$

Considerando-se que:

$$e^{2\,\alpha} \;=\; e^{\alpha}\, e^{\alpha} \;, \qquad (5.3.1.36a)$$

$$\int_o^L f(x)\,dx = \int_o^x f(x)\,dx \;+\; \int_x^L f(x)\,dx \;, \qquad (5.3.1.36b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx \;, \quad (5.3.1.36c)$$

e a identidade trigonométrica:

$$tgh\;\alpha \;=\; \frac{e^{\alpha} \,-\, e^{-\,\alpha}}{e^{\alpha} \,+\, e^{-\,\alpha}} \;, \qquad (5.3.1.37)$$

a expressão para $S_2(x)$ vista acima será escrita na forma:

$$S_2(x) \;=\; \frac{\gamma \,+\, \delta}{2} \,+$$

$$+ \, tg^{-\,1}\left(\frac{e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_o^x \bar{Q}\,dx} \,-\, e^{-\int_o^x \bar{Q}\,dx}}{e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_o^x \bar{Q}\,dx} \,+\, e^{-\int_o^x \bar{Q}\,dx}} \left[\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}\right] \right) =$$

$$= \; \frac{\gamma \,+\, \delta}{2} \;+\; tg^{-\,1} \Bigg(\left[\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}\right] \times$$

$$\times \; \frac{1}{e^{-\int_o^x \bar{Q}\,dx}\, e^{-\int_x^L \bar{Q}\,dx}\, e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_o^x \bar{Q}\,dx} \,+\, e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_x^L \bar{Q}\,dx}} \; \times$$

$$\times \Big[\, e^{-\int_o^x \bar{Q}\,dx}\, e^{-\int_x^L \bar{Q}\,dx}\, e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_o^x \bar{Q}\,dx} \,-$$

$$-\, e^{-\int_o^L \bar{Q}\,dx}\, e^{\int_x^L \bar{Q}\,dx} \, \Big] \Bigg) \;=$$

$$= \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \Bigg([\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \times$$

$$\times \frac{e^{- \int_o^L \bar{Q} \ dx} \left(e^{- \int_x^L \bar{Q} \ dx} - e^{\int_x^L \bar{Q} \ dx} \right)}{e^{- \int_o^L \bar{Q} \ dx} \left(e^{- \int_x^L \bar{Q} \ dx} + e^{\int_x^L \bar{Q} \ dx} \right)} \Bigg) =$$

$$= \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \left(\frac{e^{- \int_x^L \bar{Q} \ dx} - e^{\int_x^L \bar{Q} \ dx}}{e^{- \int_x^L \bar{Q} \ dx} + e^{\int_x^L \bar{Q} \ dx}} [\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \right) =$$

$$= \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \left(\frac{e^{\int_L^x \bar{Q} \ dx} - e^{- \int_L^x \bar{Q} \ dx}}{e^{\int_L^x \bar{Q} \ dx} + e^{- \int_L^x \bar{Q} \ dx}} [\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \right) \rightarrow$$

$$S_2(x) = \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \left([\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\int_L^x \bar{Q} \ dx) \right) . \quad (5.3.1.38)$$

Fazendo-se $x = 0$ na expressão acima e usando-se a expressão (5.3.1.36c), resultará [é oportuno lembrar que $tgh \ (- \alpha) = - \ tgh \ \alpha, \ tg^{-1} \ (- \alpha) = - \ tg^{-1} \ \alpha$]:

$$S_2(0) = \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \left([\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\int_L^o \bar{Q} \ dx) \right) =$$

$$= \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \left([\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (- \int_o^L \bar{Q} \ dx) \right) =$$

$$= \frac{\gamma + \delta}{2} + tg^{-1} \left([- \frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\int_o^L \bar{Q} \ dx) \right) \rightarrow$$

$$S_2(0) = \frac{\gamma + \delta}{2} -$$

$$- \ tg^{-1} \left([\frac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\int_o^L \bar{Q} \ dx) \right) . \qquad (5.3.1.39)$$

Usando-se as expressões (5.3.1.35b,38-39), obteremos:

$$\Delta S_2(x) \ = \ \frac{\gamma \ + \ \delta}{2} \ + \ tg^{-\ 1} \left([\tfrac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\textstyle\int_L^x \ \bar{Q} \ dx) \right) -$$

$$- \ \frac{\gamma \ + \ \delta}{2} \ + \ tg^{-\ 1} \left([\tfrac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\textstyle\int_o^L \ \bar{Q} \ dx) \right) \ \ \rightarrow$$

$$\Delta S_2(x) \ = \ tg^{-\ 1} \left([\tfrac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\textstyle\int_L^x \ \bar{Q} \ dx) \right) +$$

$$+ \ tg^{-\ 1} \left([\tfrac{k_3}{\bar{Q}(L)}] \ tgh \ (\textstyle\int_o^L \ \bar{Q} \ dx) \right) . \qquad (5.3.1.40)$$

Considerando-se as expressões (5.2.1.4b) e (5.3.1.35a), obteremos:

$$\bar{Q}^2(x) \ = \ \frac{2 \ m}{\hbar^2} \ [V \ - \ E_1 \ + \ \hbar \ \nu \ \Delta \ S_2(x)] \ =$$

$$= \ \frac{2 \ m}{\hbar^2} \ (V \ - \ E_1) \ + \ \frac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ \Delta \ S_2(x) \ =$$

$$= \ \bar{q}_1^2 \ + \ \frac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ \Delta \ S_2(x) \ = \ \bar{q}_1^2 \ [1 \ + \ 2 \ \frac{m \ \nu}{\hbar \ \bar{q}_1^2} \ \Delta \ S_2(x)] \ \ \rightarrow$$

$$\bar{Q}(x) \ = \ \bar{q}_1 \ \sqrt{1 \ + \ 2 \ \bar{\epsilon} \ \Delta \ S_2(x)} \ , \qquad (5.3.1.41a)$$

onde:

$$\bar{\epsilon} \ = \ \frac{m \ \nu}{\hbar \ \bar{q}_1^2} \ . \qquad (5.3.1.41b)$$

Usando-se a fórmula binomial $[(1 \ + \ x)^n \simeq 1 \ + \ n \ x$, para $x \ll 1]$ na expressão (5.3.1.41a), virá:

$$\bar{Q} \simeq \bar{q}_1 \ [1 \ + \ \bar{\epsilon} \ \Delta \ S_2(\mathrm{x})] \ . \qquad (5.3.1.42)$$

Agora, expandiremos $\Delta S_2(\bar{Q})$ em torno de $\bar{q}_1$, usando-se a **expansão de Taylor** $[f(x) \simeq f(a) \ + \ (x \ - \ a) \ f'(a)]$. Desse modo, tomando-se a expressão (5.3.1.42), teremos:

$$\Delta S_2(\bar{Q}) \simeq \Delta S_2(\bar{q}_1) \ + \ (\bar{Q} \ - \ \bar{q}_1) \ \frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} \ =$$

$$= \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ + \ \bar{q}_1 \ \bar{\epsilon} \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ \frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} \quad \rightarrow$$

$$\Delta S_2(\bar{Q}) \ = \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ [1 \ + \ \bar{q}_1 \ \bar{\epsilon} \ \frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1}] \ . \qquad (5.3.1.43)$$

Agora, calculemos a derivada indicada na expressão acima. Assim, tomando-se a expressão (5.3.1.40) e considerando-se que $\bar{Q} \sim \bar{q}_1$ [usar a expressão (5.3.1.42) e lembrar que $\bar{\epsilon}(\nu)$ é pequeno]:

$$\Delta S_2[\bar{q}_1(x)] \sim tg^{-\ 1} \ \Big(\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1}) \ tgh \ [\bar{q}_1(x \ - \ L)] \ \Big) \ +$$

$$+ \ tg^{-\ 1} \ \Big(\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1}) \ tgh \ (\bar{q}_1 \ L) \ \Big) \ . \qquad (5.3.1.44a)$$

Tomando-se as expressões (5.2.2.32d-e), virá [lembrar que a expressão (5.2.2.32e) também vale para a tangente hiperbólica]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \ \Bigg[\ tg^{-1} \ \Big(\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1}) \ tgh \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)] \ \Big) \ \Bigg] \ =$$

$$= \ \frac{1}{1 \ + \ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2 \ tgh^2 \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)]} \ \frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \ \Bigg(\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1}) \ tgh \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)] \ \Bigg) \ =$$

$$= \ \frac{1}{1 \ + \ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2 \ tgh^2 \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)]} \ \Bigg(\ - \ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2} \ tgh \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)] \ +$$

$$+ \ \frac{k_3 \ (x \ - \ L)}{\bar{q}_1} \ sech^2 \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)] \ \Bigg) \ .$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \left(tg^{-1} \left[\left(\frac{k_3}{\bar{q}_1}\right) tgh\ (\bar{q}_1\ L) \right] \right) =$$

$$= \frac{1}{1\ +\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2\ tgh^2\ (\bar{q}_1\ L)} \left(-\ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2}\ tgh\ (\bar{q}_1\ L) + \right.$$

$$\left. +\ \frac{k_3\ L}{\bar{q}_1}\ sech^2\ (\bar{q}_1\ L) \right) ,$$

$$\frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} = \frac{1}{1\ +\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2\ tgh^2\ [\bar{q}_1\ (x\ -\ L)]} \left[-\ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2}\ tgh\ [\bar{q}_1\ (x\ -\ L)] + \right.$$

$$\left. +\ \frac{k_3\ (x\ -\ L)}{\bar{q}_1}\ sech^2\ [\bar{q}_1\ (x\ -\ L)] \right] +$$

$$+\ \frac{1}{1\ +\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2\ tgh^2\ (\bar{q}_1\ L)} \left[-\ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2}\ tgh\ (\bar{q}_1\ L) + \right.$$

$$\left. +\ \frac{k_3\ L}{\bar{q}_1}\ sech^2\ (\bar{q}_1\ L) \right] . \qquad (5.3.1.44b)$$

Estudemos os casos limites de (5.3.1.44b) correspondentes, respectivamente, a grandes e pequenas barreiras. Assim [lembrar que $tgh(\pm\infty) \to \pm 1$ e $sech(\pm\infty) \to 0$, que $tgh(\sim 0) \to 0$, $sech(\sim 0) \to 1$, e que $x \leq L$][8]:

a) Se $\bar{q}_1\ L \gg 1$, então:

$$\frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} \sim \frac{1}{1\ +\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2\ \times\ 1} \left[-\ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2} \times (-\ 1)\ +\ \frac{k_3\ (x\ -\ L)}{\bar{q}_1} \times 0 \right] +$$

$$+\ \frac{1}{1\ +\ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2\ \times\ 1} \left(-\ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2} \times 1\ +\ \frac{k_3\ L}{\bar{q}_1} \times 0 \right) \ \to\ \frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} \sim 0\ .$$

Levando-se esse resultado na expressão (5.3.1.43), resultará:

$$\Delta S_2(\bar{Q}) \ = \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ . \qquad (5.3.1.45)$$

b) Se $\bar{q}_1 \ L \ll 1$, então:

$$\frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} \sim \frac{1}{1 \ + \ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2 \ \times \ 0} \Big[\ - \ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2} \times 0 \ + \ \frac{k_3 \ (x \ - \ L)}{\bar{q}_1} \times 1 \ \Big] +$$

$$+ \ \frac{1}{1 \ + \ (\frac{k_3}{\bar{q}_1})^2 \ \times \ 0} \Big(\ - \ \frac{k_3}{\bar{q}_1^2} \times 0 \ + \ \frac{k_3 \ L}{\bar{q}_1} \times 1 \ \Big) \ =$$

$$= \ \frac{k_3 \ (x \ - \ L)}{\bar{q}_1} \ + \ \frac{k_3 \ L}{\bar{q}_1} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \Delta S_2(\bar{q}_1)}{\partial \bar{q}_1} \ = \ \frac{k_3 \ x}{\bar{q}_1} \sim \frac{k_3 \ L}{\bar{q}_1}.$$

Levando-se esse resultado na expressão (5.3.1.43), virá [lembrar que $\bar{\epsilon}(\nu)$ é pequeno]:

$$\Delta S_2(\bar{Q}) \ = \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ (1 \ + \ \bar{\epsilon} \ \bar{q}_1 \ \frac{k_3 \ L}{\bar{q}_1}) \ =$$

$$= \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ (1 \ + \ \bar{\epsilon} \ k_3 \ L) \quad \rightarrow$$

$$\Delta S_2(\bar{Q}) \simeq \Delta S_2(\bar{q}_1) \ . \qquad (5.3.1.46)$$

Os resultados acima, representados pelas expressões (5.3.1.45-46), nos mostram que, em ambos limites da barreira dissipativa, poderemos escrever:

$$\Delta S_2(\bar{Q}) \ = \ \Delta S_2(\bar{q}_1) \ . \qquad (5.3.1.47)$$

O resultado acima nos permite substituir $\bar{Q}(L)$ por $\bar{q}_1$. Em vista disso, k_3 também pode ser substituído por k_1, uma vez que ele pode ser expresso em termos de $\bar{Q}(L)$. Assim, usando-se tais substituições na expressão (5.3.1.40), virá:

$$\Delta S_2[\bar{q}_1(x)] \ = \ tg^{-\ 1} \ \Big(\ (\tfrac{k_1}{\bar{q}_1}) \ tgh \ [\bar{q}_1(x \ - \ L)] \ \Big) \ +$$

$$+ \ tg^{-\ 1} \ \Big(\ (\tfrac{k_1}{\bar{q}_1}) \ tgh \ (\bar{q}_1 \ L) \ \Big) \ . \qquad (5.3.1.48)$$

Por fim, levando-se a expressão acima na expressão (5.3.1.42), obteremos:

$$\bar{Q}(x) \ = \ \bar{q}_1 \ + \ \tfrac{m \ \nu}{\hbar \ \bar{q}_1} \ \Big[\ tg^{-\ 1} \ \Big(\ \tfrac{1}{\bar{n}_1} \ tgh \ [\bar{q}_1 \ (x \ - \ L)] \ \Big) \ +$$

$$+ \ tg^{-\ 1} \ \Big(\ \tfrac{1}{\bar{n}_1} \ tgh \ (\bar{q}_1 \ L) \ \Big) \ \Big] \ , \qquad \bar{n}_1 \ = \ \tfrac{\bar{q}_1}{k_1} \ . \qquad (5.3.1.49a\text{-}b)$$

Agora, tomemos a expressão (5.3.1.34) e analisemos o caso particular em que não há dissipação, ou seja, $\nu = 0$.[9] Assim, usando-se esse valor nas expressões (5.3.1.31a-e,49a-b), teremos:

$$\bar{Q}(L) \ = \ \bar{Q}(0) \ = \ \bar{q}_1 \equiv \bar{q} \ , \qquad (5.3.1.50a)$$

$$k_3 \ = \ k_1 \equiv k \ , \qquad A \ = \ \tfrac{1}{2} \ (1 \ + \ 1) \ = \ 1 \ , \qquad (5.3.1.50b\text{-}c)$$

$$B \ = \ \tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ \bar{q}^2} \ , \qquad C \ = \ (\tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{4 \ \bar{q} \ k})^2 \ , \qquad (5.3.1.50d\text{-}e)$$

$$D \ = \ 1 \ , \qquad \alpha \ = \ \bar{q} \ L \ . \qquad (5.3.1.50f\text{-}g)$$

Considerando-se a expressão (5.3.1.34) e levando-se nela as expressões (5.3.1.50c-g), resultará:

$$b^{-\ 2} \ = \ \frac{1}{1 \ + \ (\frac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L)} \ \times$$

$$\times \ \Big(\ 1 \ + \ (\tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{\bar{q}^2}) \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) \ + \ (\tfrac{\bar{q}^2 \ + \ k^2}{2 \ k \ \bar{q}})^2 \ senh^2 \ (\bar{q} \ L) \ \times$$

$$\times \; [1 \; + \; senh^2(\bar{q} \; L) \; (1 \; + \; \frac{k^2}{\bar{q}^2})] \Big) \; =$$

$$= \; \frac{[1 \; + \; (\frac{\bar{q}^2 \; + \; k^2}{\bar{q}^2}) \; senh^2 \; (\bar{q} \; L)] \; [1 \; + \; (\frac{\bar{q}^2 \; + \; k^2}{2 \; k \; \bar{q}})^2 \; senh^2 \; (\bar{q} \; L)]}{1 \; + \; (\frac{\bar{q}^2 \; + \; k^2}{\bar{q}^2}) \; senh^2 \; (\bar{q} \; L)} \quad \rightarrow$$

$$b^{- \; 2} \; = \; 1 \; + \; \frac{(\bar{q}^2 \; + \; k^2)^2}{4 \; k^2 \; \bar{q}^2} \; senh^2 \; (\bar{q} \; L) \; , \qquad (5.3.1.51)$$

que é o mesmo resultado que já havíamos encontrado nos itens 5.2.1-2 [vide expressões (5.2.1.13) e (5.2.2.57)].

Para concluir, calculemos a energia perdida na barreira dissipativa. Assim, tomando-se a expressão (5.3.1.14) e usando-se as expressões (5.3.1.38-39), virá [deveremos lembrar que $\int_a^a \; f(x) \; dx = \; 0$ e $tgh \; (- \; \alpha) \; = \; - \; tgh \; \alpha$]:

$$E_3 \; - \; E_1 \; = \; - \; \hbar \; \nu \; [S_2(L) \; - \; S_2(0)] \; =$$

$$= \; - \; \hbar \; \nu \; \Big(\; \frac{\gamma \; + \; \delta}{2} \; - \; \frac{\gamma \; + \; \delta}{2} \; + \; tg^{- \; 1} \; [\frac{1}{\bar{n}_1} \; tgh \; (- \; \bar{q}_1 \; L)] \; \Big) \quad \rightarrow$$

$$E_3 \; - \; E_1 \; = \; - \; \hbar \; \nu \; \Big(\; tg^{- \; 1} \; [\frac{1}{\bar{n}_1} \; tgh \; (- \; \bar{q}_1 \; L)] \; \Big) \; . \qquad (5.3.1.52)$$

Considerando-se as expressões (5.2.1.4b) e (5.3.1.41b), teremos:

$$\bar{\epsilon} \; = \; \frac{m \; \nu}{\bar{q}_1^2} \; = \; \frac{m \; \nu \; \hbar^2}{\hbar \; 2 \; m \; (V \; - \; E_1)} \quad \rightarrow$$

$$\hbar \; \nu \; = \; 2 \; \bar{\epsilon} \; (V \; - \; E_1) \; = \; 2 \; \bar{\epsilon} \; V \; (1 \; - \; \frac{E_1}{V}) \; . \qquad (5.3.1.53)$$

Considerando-se a expressão (5.3.1.52) e inserindo-se nela a expressão (5.3.1.53), virá:

$$(\frac{E_3 \; - \; E_1}{V}) \; = \; - \; 2 \; \bar{\epsilon} \; (1 \; - \; \frac{E_1}{V}) \; tg^{- \; 1} \; [\frac{tgh \; (\bar{q}_1 \; L)}{\bar{n}_1}] \; , \qquad (5.3.1.54)$$

expressão que mostra ser a energia (E_3) das partículas após atravessarem a barreira dissipativa menor do que a energia (E_1) das partículas incidentes.

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. O nome **radioatividade** foi cunhado pela física e química polonesa Marie Sklowska Curie (1867-1934; PNF, 1903; PNQ, 1911), em 1898.

2. A descoberta do **nêutron**, em 1932, mostrou que a partícula α era o núcleo do hélio, formado de 2 prótons e de dois nêutrons ($_2He^4$) ou, equivalentemente, era o átomo de hélio duplamente ionizado.

3. Ainda em 1928, o físico alemão Lothar Wolfgang Nordheim (1899- ?) apresentou a idéia de que alguns elétrons em um metal poderiam "atravessar a barreira de potencial" representada pela superfície do metal, mesmo se tivesse energia menor do que a altura da barreira.

4. Para um outro tratamento desse tipo de tunelamento, veja-se: CALDEIRA, A. O. and LEGGETT, A. J. 1983. *Annals of Physics 149*, 374. É oportuno registrar que o **tunelamento quântico** é o responsável por alguns fenômenos físicos bem atuais, como o que ocorre no dispositivo conhecido como **SQUID** ("superconductor interference device"), isto é, um anel supercondutor interrompido por uma **junção de Josephson**, na **racemização** (CATTANI, M. and BASSALO, J. M. F. 1999. *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiation Transfer 61*, 299-302), e na formação de bolhas (**cavitação**) no hélio líquido (MARIS, H. and BALIBAR, S. 2000. *Physics Today*, February, 29-34).

5. Essa solução encontra-se em vários textos de Mecânica Quântica. Veja-se, por exemplo, os seguintes:

   . POWELL, J. L. and CRASEMAN, B. 1961. **Quantum Mechanics**. Addison Wesley Publishing Company, Incorporation.

. DAVYDOV, A. S. 1965. **Quantum Mechanics**. Pergamon Press.

. DICKE, R. H. and WITTKE, J. P. 1966. **Introduction to Quantum Mechanics**. Addison Wesley Publishing Company, Incorporation.

. SCHIFF, L. I. 1970. **Quantum Mechanics**. McGraw-Hill Book Company, Incorporation.

. MERZBACHER, E. 1976. **Quantum Mechanics**. John Wyley and Sons, Incorporation.

. MOURA, O. 1984. **Mecânica Quântica**. EDUFPA.

. SHANKAR, R. 1994. **Principles of Quantum Mechanics**, Plenum Press.

6. GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. W. 1965. **Table of Integrals, Series and Products**. Academic Press.

7. NASSAR, A. B. 1993. *NASA Conference Publication 3197*, p. 149-154.

8. ABRAMOWITZ, A. and SEGUN, I. A. (Editors) 1968. **Handbook of Matematical Functions**. Dover Publications, Inc.

9. Para o caso particular de grandes barreiras dissipativas, isto é, ($\bar{q}\, L \gg 1$), veja-se o estudo analítico-gráfico em: SERRA, V. F. 1999. **Condições de Contorno no Tunelamento sem Continuidade da Função de Onda**, *Tese de Mestrado*, DFUFPA.

CAPÍTULO 6

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

E OS SÓLITONS GAUSSIANOS

6.1 Introdução

Neste Capítulo, estudaremos o não-espraiamento de pacotes de onda de Schrödinger, isto é, os sólitons[1] gaussianos, usando resultados da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm ($MQBB$) obtidos nos Capítulos 1 e 3. Inicialmente, veremos como tais pacotes de onda surgem na Mecânica Quântica de Schrödinger; em seguida, aplicaremos o formalismo da $MQBB$ para tais ondas; e, por fim, usaremos os resultados obtidos para o caso do Potencial Parabólico Invertido.

6.2 Sólitons Gaussianos via Mecânica Quântica de Schrödinger

De um modo geral, pacotes de ondas não-dispersivos (sólitons) são soluções da **equação de Schrödinger não-linear (ESNL)** do tipo:[2]

$$i\,\hbar\,\frac{\partial \Psi(x,\ t)}{\partial t} = -\,\frac{\hbar^2}{2\ m}\,\frac{\partial^2 \Psi(x,\ t)}{\partial x^2} + V_\epsilon\,\Psi(x,\ t) -$$

$$-\,G\mid \Psi(x,\ t)\mid^2 \Psi(x,\ t)\ , \qquad (6.2.1)$$

onde m é a massa efetiva do sistema físico considerado, V_ϵ é uma energia potencial média constante, e G é o parâmetro que regula a intensidade da não-linearidade.

A $ESNL$ representada pela expressão (6.2.1) possui uma bem conhecida solução-sóliton em termos de uma função secante hiperbólica, qual seja:[2]

$$\Psi(x,\ t) \ = \ (\tfrac{k}{2})^{1/2} \ sech \ [k \ (x \ - \ x_o \ - v \ t)] \ \times$$

$$\times \ exp \ [\tfrac{i \ m \ v}{\hbar} \ (x \ - \ x_o \ - \ v' \ t)] \ , \qquad (6.2.2)$$

onde:

$$k \ = \ \frac{m \ G}{2 \ \hbar^2} \ , \qquad v' \ = \ \frac{V_\epsilon \ + \ m \ v^2/2 \ - \ \hbar^2 \ k^2/2}{m \ v} \ . \qquad (6.2.3a\text{-}b)$$

Observe-se que a expressão (6.2.2) representa um pacote de onda não dispersivo, inicialmente centrado em x_o, e movendo-se ao longo de uma trajetória clássica com velocidade constante v.

Destaque-se, também, que existem soluções do tipo sóliton da $ESNL$ [vide expressão (6.2.1)] quando se considera um potencial externo constante. Neste caso, esses sólitons se movem com aceleração constante e têm a mesma forma da correspondente sem esse potencial externo.[2] Além do mais, segundo ainda sugere Rainer W. Hasse,[2] soluções desse tipo da $ESNL$ vista acima podem existir quando se considera um Potencial Parabólico Invertido.

6.3. Sólitons Gaussianos via Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

Neste item, procuraremos a solução-sóliton da $ESNL$, representada pela expressão (6.2.1), para um potencial qualquer. Para isso, usaremos os resultados obtidos no Capítulo 3.

Tomando-se a expressão (6.2.1) e admitindo-se que $V_\epsilon(x,\ t)$, teremos:

$$i \ \hbar \ \frac{\partial \Psi(x,\ t)}{\partial t} \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2 \Psi(x,\ t)}{\partial x^2} \ +$$

$$+ \ V(x,\ t) \ \Psi(x,\ t) \ , \qquad (6.3.1)$$

onde:

$$V(x,\ t)\ =\ V_{\epsilon}(x,\ t)\ +\ V_{n\ell}(x,\ t)\ , \qquad (6.3.2a)$$

com [lembrar a expressão (3.3.1.2)]:

$$V_{n\ell}(x,\ t)\ =\ -\ G\ \mid\ \Psi(x,\ t)\ \mid^{2}\ =$$

$$=\ -\ G\ \phi^{2}(x,\ t)\ . \qquad (6.3.2b\text{-}c)$$

Considerando-se que as expressões (3.3.1.1) e (6.3.1) idênticas, portanto, em analogia com o item 3.3. poderemos escrever que [vide as seguintes expressões (3.3.1.2,4a,7a), (3.3.2.1-2,6,9b,11-12) e (6.3.2a)]:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \phi(x,\ t)\ e^{i\ S(x,\ t)}\ , \qquad (6.3.3)$$

$$\phi(x,\ t)\ =\ [2\ \pi\ a^{2}(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^{2}}{4\ a^{2}(t)}}\ , \qquad (6.3.4a)$$

$$\rho(x,\ t)\ =\ [2\ \pi\ a^{2}(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^{2}}{2\ a^{2}(t)}}\ , \qquad (6.3.4b)$$

$$v_{qu}(x,\ t)\ =\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x\ -\ X(t)]\ +\ \dot{X}(t)\ , \qquad (6.3.5)$$

$$\hbar\ \frac{\partial S}{\partial t}\ +\ \frac{1}{2}\ m\ v_{qu}^{2}\ +\ V_{\epsilon}\ +\ V_{n\ell}\ +\ V_{qu}\ =\ 0\ , \qquad (6.3.6)$$

$$V_{qu}(x,\ t)\ =\ -\ (\frac{\hbar^{2}}{2\ m\ \phi})\ \frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}\ , \qquad (6.3.7)$$

$$S(x,\ t)\ =\ S[X(t),\ t]\ +\ S'[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{S''[X(t),\ t]}{2}\ [x\ -\ X(t)]^{2}\ , \qquad (6.3.8)$$

$$V_{\epsilon}(x,\ t)\ =\ V_{\epsilon}[X(t),\ t]\ +\ V'_{\epsilon}[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+ \ \frac{V''_{\epsilon}[X(t),\ t]}{2} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ , \qquad (6.3.9)$$

$$V_{n\ell}(x,\ t) \ = \ V_{n\ell}[X(t),\ t] \ + \ V'_{n\ell}[X(t),\ t] \ [x \ - \ X(t)] \ +$$

$$+ \ \frac{V''_{n\ell}[X(t),\ t]}{2} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ , \qquad (6.3.10)$$

$$V_{qu}(x,\ t) \ = \ V_{qu}[X(t),\ t] \ + \ V'_{qu}[X(t),\ t] \ [x \ - \ X(t)] \ +$$

$$+ \ \frac{V''_{qu}[X(t),\ t]}{2} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ , \qquad (6.3.11)$$

$$S(x,\ t) \ = \ S_o(t) \ + \ \frac{m \ \dot{X}(t)}{\hbar} \ [x \ - \ X(t)] \ +$$

$$+ \ \frac{m \ \dot{a}(t)}{2 \ \hbar \ a(t)} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ , \qquad (6.3.12)$$

onde $S_o(t)$ é a **ação quântica** [vide expressão (3.3.2.12)].

Derivando-se a expressão acima em relação a t, obteremos [vide expressão (3.3.2.13) e lembrar que $\frac{\partial x}{\partial t} \ = \ 0$]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} \ = \ \dot{S}_o(t) \ + \ \frac{m \ \ddot{X}(t)}{\hbar} \ [x \ - \ X(t)] \ - \ \frac{m \ \dot{X}(t)^2}{\hbar} \ +$$

$$+ \ \frac{m}{2 \ \hbar} \ [\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \ - \ \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}] \ [x \ - \ X(t)]^2 \ -$$

$$- \ \frac{m \ \dot{a}(t) \ \dot{X}(t)}{\hbar \ a(t)} \ [x \ - \ X(t)] \ . \qquad (6.3.13)$$

Tomando-se as expressões para $V_{n\ell}$ [(6.3.10)] e V_{qu} [(6.3.11)], vamos escrevê-las em potências de [x - X(t)]. Para V_{qu}, usaremos as expressões (3.3.2.14) e (6.3.7). Desse modo, teremos:

$$V_{qu}(x,\ t) \ = \ \frac{\hbar^2}{4 \ m \ a^2(t)} \ - \ \frac{\hbar^2}{8 \ m \ a^4(t)} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ . \qquad (6.3.14)$$

Para $V_{n\ell}$, usaremos as expressões (6.3.2c,4a). Assim, virá:

$$V_{n\ell}(x,\ t)\ =\ -\ G\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ . \qquad (6.3.15)$$

Derivando-se a expressão acima em relação x, obteremos:

$$V'_{n\ell}(x,\ t)\ =\ -\ G\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ \times$$

$$\times\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ -\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}\ \Big)\ \ \to$$

$$V'_{n\ell}(x,\ t)\ =\ \frac{G}{a^2(t)}\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ \times$$

$$\times\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ [x\ -\ X(t)]\ . \qquad (6.3.16)$$

Derivando-se a expressão acima em relação x, virá:

$$V''_{n\ell}(x,\ t)\ =\ \frac{G}{a^2(t)}\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ \times$$

$$\times\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ [x\ -\ X(t)]\ \Big)\ =$$

$$=\ \frac{G}{a^2(t)}\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ \Bigg(\ [x\ -\ X(t)]\ \frac{\partial}{\partial x}\ \Big(\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ \Big) +$$

$$+\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ \frac{\partial}{\partial x}\ [x\ -\ X(t)]\ \Bigg) \to$$

$$V''_{n\ell}(x,\ t)\ =\ \frac{G}{a^2(t)}\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/2}\ \times$$

$$\times\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{2\ a^2(t)}}\ \Big(\ 1\ -\ \tfrac{1}{a^2(t)}\ [x\ -\ X(t)]^2\ \Big)\ . \qquad (6.3.17)$$

Fazendo-se x = X(t) nas expressões (6.3.15-17), resultará:

$$V_{n\ell}[X(t),\ t]\ =\ -\ \tfrac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ , \qquad (6.3.18)$$

$$V'_{n\ell}[X(t),\ t]\ =\ 0\ , \qquad (6.3.19)$$

$$V''_{n\ell}[X(t),\ t]\ =\ \tfrac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a^3(t)}\ . \qquad (6.3.20)$$

Tomando-se a expressão (6.3.10) e substituindo-se nela as expressões (6.3.18-20), teremos:

$$V_{n\ell}(x,\ t)\ =\ -\ \tfrac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ +$$

$$+\ \tfrac{G}{2\ \sqrt{2\ \pi}\ a^3(t)}\ [x\ -\ X(t)]^2\ . \qquad (6.3.21)$$

Levando-se as expressões (6.3.5,9,13-14,21) na expressão (6.3.6), virá:

$$\hbar\ \tfrac{\partial S}{\partial t}\ +\ \tfrac{1}{2}\ m\ v_{qu}^2\ +\ V_{\epsilon}\ +\ V_{n\ell}\ +\ V_{qu}\ =$$

$$=\ \hbar\ \Big(\ \dot{S}_o(t)\ +\ \tfrac{m\ \ddot{X}(t)}{\hbar}\ [x\ -\ X(t)]\ -\ \tfrac{m\ \dot{X}^2(t)}{\hbar}\ +$$

$$+\ \tfrac{m}{2\ \hbar}\ [\tfrac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\ -\ \tfrac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}]\ [x\ -\ X(t)]^2\ -$$

$$-\ \tfrac{m\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{\hbar\ a(t)}\ [x - X(t)]\ \Big)\ +\ \tfrac{m}{2}\ \Big(\ \tfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}\ [x - X(t)]\ +\ \dot{X}(t)\Big)^2\ +$$

$$+\ V_{\epsilon}[X(t),\ t]\ +\ V'_{\epsilon}[X(t),\ t]\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+ \frac{V''_\epsilon[X(t),\ t]}{2}\ [x\ -\ X(t)]^2\ -\ \frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ +$$

$$+ \frac{G}{2\ \sqrt{2\ \pi}\ a^3(t)}\ [x\ -\ X(t)]^2\ +\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ -$$

$$- \frac{\hbar^2}{8\ m\ a^4(t)}\ [x\ -\ X(t)]^2\ =\ 0\ . \qquad (6.3.22a)$$

Considerando-se que [x - X(t)]^o = 1, poderemos agrupar a expressão acima em potências de [x - X(t)]. Desse modo, teremos:

$$\Big(\hbar \dot{S}_o(t)\ -\ m\ \dot{X}^2(t)\ +\ \frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t)\ +\ V_\epsilon[X(t),\ t]\ -$$

$$-\ \frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ +\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ \Big)\ [x\ -\ X(t)]^o\ +$$

$$+\ \Big(\ m\ \ddot{X}(t)\ -\ \frac{m\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{a(t)}\ +\ \frac{m}{2}\ \frac{2\ \dot{a}(t)\ \dot{X}(t)}{a(t)}\ +$$

$$+\ V'_\epsilon[X(t),\ t]\ \Big)\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \Big(\ \frac{m}{2}\ [\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\ -\ \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}]\ +\ \frac{m}{2}\ \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\ +\ \frac{V''_\epsilon[X(t),\ t]}{2}\ +$$

$$+\ \frac{G}{2\ \sqrt{2\ \pi}\ a^3(t)}\ -\ \frac{\hbar^2}{8\ m\ a^4(t)}\ \Big)\ [x\ -\ X(t)]^2\ =\ 0\ . \qquad (6.3.22b)$$

Sendo a expressão acima um polinômio identicamente nulo, então os coeficientes de suas potências serão todos nulos, ou seja:

$$\dot{S}_o(t)\ =\ \frac{1}{\hbar}\ \Big(\ \frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t)\ -\ V_\epsilon[X(t),\ t]\ +$$

$$+\ \frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a(t)}\ -\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ \Big)\ , \qquad (6.3.23)$$

$$\ddot{X}(t) \ = \ - \ \tfrac{1}{m} \ V'_\epsilon[X(t), \ t] \ = \ - \ \tfrac{1}{m} \ \tfrac{\partial V_\epsilon[X(t), \ t]}{\partial x} \ , \qquad (6.3.24)$$

$$\ddot{a}(t) \ + \ \Big(\ \tfrac{1}{m} \ V''_\epsilon[X(t), \ t] \ \Big) \ a(t) \ =$$

$$= \ \frac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ a^3(t)} \ - \ \frac{G}{\sqrt{2 \ \pi} \ m \ a^2(t)} \ . \qquad (6.3.25)$$

As expressões (6.3.23-25) deduzidas acima descrevem a dinâmica semiclássica do pacote de onda representado pela expressão (6.3.4a).

6.4. Evolução de Sólitons Gaussianos sob Potencial Parabólico Invertido

Neste item, estudaremos a dinâmica semiclássica de um **sóliton gaussiano** deslizando em um potencial parabólico invertido, definido por:

$$V_\epsilon[X(t), \ t] = \ - \ \tfrac{1}{2} \ m \ \Omega^2 \ X^2(t) \ , \qquad (6.4.1)$$

e determinaremos as condições satisfeitas por G para que tenhamos essa situação física.

Para que não ocorra o espraiamento do pacote (sóliton gaussiano), sua largura $a(t)$ deve permanecer constante, ou seja:

$$a(t) \ = \ a(0) \ = \ a_o \ , \qquad (6.4.2a)$$

$$\dot{a}(t) \ = \ 0 \ , \quad \ddot{a}(t) \ = \ 0 \ . \qquad (6.4.2b\text{-}c)$$

Assim, levando-se as expressões (6.4.1,2a-c) nas expressões (6.3.23-25), virá:

$$\dot{S}_o(t) \ = \ \tfrac{1}{\hbar} \ \Big(\ \tfrac{1}{2} \ m \ \dot{X}^2(t) \ + \ \tfrac{1}{2} \ m \ \Omega^2 \ X^2(t) \ +$$

$$+ \frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ a_o} \ - \ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2} \Big) \ , \qquad (6.4.3)$$

$$\ddot{X}(t) \ - \ \Omega^2\ X(t) \ = \ 0 \ , \qquad (6.4.4)$$

$$-\ \Omega^2\ a_o \ = \ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a_o^3} \ - \ \frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ m\ a_o^2} \quad \rightarrow$$

$$a_o^4 \ - \ \Big(\frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ m\ \Omega^2} \Big)\ a_o \ + \ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ \Omega^2} \ = \ 0 \ . \qquad (6.4.5)$$

Para resolvermos as equações diferenciais indicadas pelas expressões (6.4.3-4), usaremos as mesmas condições iniciais consideradas no item 3.2.2., ou seja [vide expressões (3.3.2.21a-b,22)]:

$$X(0) \ = \ x_o \ , \qquad \dot{X}(0) \ = \ v_o \ , \qquad (6.4.6a\text{-}b)$$

$$S_o(0) \ = \ \frac{m\ v_o\ x_o}{\hbar} \ . \qquad (6.4.6c)$$

Usando-se as expressões (6.4.6a-b), a equação representada pela expressão (6.4.4) tem a seguinte solução:[3]

$$X(t) \ = \ x_o\ cosh\ (\Omega\ t) \ + \ \frac{v_o}{\Omega}\ senh\ (\Omega\ t) \ , \qquad (6.4.7a)$$

e [sendo $\frac{d}{dz} senh(az) = acosh(az)$, $\frac{d}{dz} cosh(az) = asenh(az)$]:

$$\dot{X}(t) \ = \ x_o\ \Omega\ senh\ (\Omega\ t) \ + \ v_o\ cosh\ (\Omega\ t) \ . \qquad (6.4.7b)$$

Em seguida, integraremos a expressão (6.4.3) e levaremos seu resultado à expressão (6.3.12). Desse modo, considerando-se as expressões (6.4.2a-b,6c), resultará [lembrar que $\int_a^b f(t)\ dt \ = \ F(b) \ - \ F(a)$]:

$$S_o(t) \ = \ \frac{1}{\hbar} \int_o^t dt' \ \Big(\frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t') \ + \ \frac{1}{2}\ m\ \Omega^2\ X^2(t') \ +$$

$$+ \frac{G}{\sqrt{2 \pi}\ a_o} - \frac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2} \Big) + \frac{m\ v_o\ x_o}{\hbar} ,$$

$$S(x,\ t) = \frac{1}{\hbar} \int_o^t dt' \Big(\frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t') + \frac{1}{2}\ m\ \Omega^2\ X^2(t') +$$

$$+ \frac{G}{\sqrt{2 \pi}\ a_o} - \frac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2} \Big) + \frac{m\ v_o\ x_o}{\hbar} +$$

$$+ \frac{m\ \dot{X}(t)}{\hbar} [x - X(t)] . \qquad (6.4.8)$$

Por fim, o **sóliton** procurado será obtido levando-se a expressão (6.4.8) na expressão (6.3.3) e considerando-se, ainda, as expressões (6.3.4a) e (6.4.2a):[4]

$$\Psi(x,\ t) = \Big(2\ \pi\ a_o^2 \Big)^{-\ 1/4} \times$$

$$\times\ exp \Big(-\ \frac{1}{4\ a_o^2} [x - X(t)]^2 \Big) \times$$

$$\times\ exp \Big(\frac{i\ m\ \dot{X}(t)}{\hbar} [x - X(t)] + \frac{i\ m\ v_o\ x_o}{\hbar} \Big) \times$$

$$\times\ exp \Big[\frac{i}{\hbar} \int_o^t dt' \Big(\frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t') + \frac{1}{2}\ m\ \Omega^2\ X^2(t') +$$

$$+ \frac{G}{\sqrt{2 \pi}\ a_o} - \frac{\hbar^2}{4\ m\ a_o^2} \Big) \Big] , \qquad (6.4.9)$$

onde a_o é uma solução da equação quártica representada pela expressão (6.4.5).

Antes de encontrarmos essa solução, vamos escrever os argumentos das expressões do segundo, terceiro, quinto e sexto termos da expressão (6.4.9) usando-se as expressões (6.4.7a-b). Para isso, usaremos as seguintes expressões:[5]

$$\int [senh^2\ (a\ z) + cosh^2\ (a\ z)]\ dz =$$

$$= \ \tfrac{1}{2\ a}\ senh\ (2\ a\ z)\ , \qquad (6.4.10a)$$

$$\int\ senh\ (a\ z)\ cosh\ (a\ z)\ dz\ \ =$$

$$= \ \tfrac{1}{4\ a}\ cosh\ (2\ a\ z)\ , \qquad (6.4.10b)$$

$$senh\ 2z\ \ = 2\ senh\ z\ cosh\ z\ , \qquad (6.4.11a)$$

$$cosh\ 2\ z\ \ -\ \ 1\ \ =\ \ 2\ senh^2\ z\ , \qquad (6.4.11b)$$

$$senh\ 0\ \ =\ \ 0\ , \qquad cosh\ 0\ \ =\ \ 1\ . \qquad (6.4.11c\text{-}d)$$

Desse modo, usando-se as expressões acima, virá:[6]

$$-\ \tfrac{1}{4\ a_o^2}\ [x\ \ -\ \ X(t)]^2\ \ =$$

$$=\ \ -\ \tfrac{1}{4\ a_o^2}\ [x\ \ -\ \ x_o\ cosh\ (\Omega\ t)\ -$$

$$-\ \tfrac{v_o}{\Omega}\ senh\ (\Omega\ t)]^2\ , \qquad (6.4.12)$$

$$\tfrac{i\ m\ \dot{X}(t)}{\hbar}\ [x -\ \ X(t)]\ \ =\ \ \tfrac{i\ m}{\hbar}\ [x_o\ \Omega\ senh\ (\Omega\ t)\ +$$

$$+\ v_o\ cosh\ (\Omega\ t)]\ \times\ [x\ \ -\ \ x_o\ cos\ (\Omega\ t)\ \ -\ \ \tfrac{v_o}{\Omega}\ senh\ (\Omega\ t)] \quad \rightarrow$$

$$\tfrac{i\ m\ \dot{X}(t)}{\hbar}\ [x -\ \ X(t)]\ \ =\ \ \tfrac{i\ m}{\hbar}\ \Big(\ v_o\ cosh\ (\Omega\ t)\ \times$$

$$\times\ [x\ \ -\ \ x_o\ cosh\ (\Omega\ t)]\ \ -\ \ \tfrac{v_o^2}{\Omega}\ senh\ (\Omega\ t)\ cosh\ (\Omega\ t)\Big]\ +$$

$$+\ \tfrac{i\ m}{\hbar}\ \Big[\ \Omega\ x_o\ senh\ (\Omega\ t)\ [x\ \ -\ \ x_o\ cosh\ (\Omega\ t)]\ -$$

$$- \, x_o \, v_o \, senh^2 \, (\Omega \, t) \, \Big] \, , \qquad (6.4.13)$$

$$\tfrac{i}{\hbar} \int_o^t dt' \, \Big[\, \tfrac{1}{2} \, m \, \dot{X}^2(t') \, + \, \tfrac{1}{2} \, m \, \Omega^2 \, X^2(t') \, \Big] \, =$$

$$= \, \tfrac{i \, m}{2 \, \hbar} \int_o^t \Big(\, [x_o \, \Omega \, senh \, (\Omega \, t') \, + \, v_o \, cosh \, (\Omega \, t')]^2 \, +$$

$$+ \, \Omega^2 \, [x_o \, cosh \, (\Omega \, t') \, + \, \tfrac{v_o}{\Omega} \, senh \, (\Omega \, t')]^2 \, \Big) \, dt' \, =$$

$$= \, \tfrac{i \, m}{2 \, \hbar} \int_o^t [x_o^2 \, \Omega^2 \, senh^2 \, (\Omega \, t') \, + \, v_o^2 \, cosh^2 \, (\Omega \, t') \, +$$

$$+ \, 2 \, x_o \, v_o \, \Omega \, senh \, (\Omega \, t') \, cosh \, (\Omega \, t') \, +$$

$$+ \, \Omega^2 \, x_o^2 \, cosh^2 \, (\Omega \, t') \, + \, \Omega^2 \, \tfrac{v_o^2}{\Omega^2} \, senh^2 \, (\Omega \, t') \, +$$

$$+ \, 2 \, \Omega^2 \, x_o \, cosh \, (\Omega \, t') \, \tfrac{v_o}{\Omega} \, senh \, (\Omega \, t')] \, dt' \, =$$

$$= \, \tfrac{i \, m}{2 \, \hbar} \int_o^t [(x_o^2 \, \Omega^2 \, + \, v_o^2) \, senh^2 \, (\Omega \, t') \, +$$

$$+ \, (x_o^2 \, \Omega^2 \, + \, v_o^2) \, cosh^{\,2} \, (\Omega \, t') \, +$$

$$+ \, 4 \, x_o \, v_o \, \Omega \, senh \, (\Omega \, t') \, cosh \, (\Omega \, t')] \, dt' \, =$$

$$= \, \tfrac{i \, m}{2 \, \hbar} \, \Big(\, (x_o^2 \, \Omega^2 \, + \, v_o^2) \int_o^t [senh^2 \, (\Omega \, t') \, + \, cosh^2 \, (\Omega \, t')] \, dt' \, +$$

$$+ \, 4 \, x_o \, v_o \, \Omega \int_o^t senh \, (\Omega \, t') \, cosh \, (\Omega \, t') \, dt' \, \Big) \, =$$

$$= \, \tfrac{i \, m}{2 \, \hbar} \, \Big[\, (x_o^2 \, \Omega^2 \, + \, v_o^2) \, \tfrac{1}{2 \, \Omega} \, senh \, (2 \, \Omega \, t')|_o^t \, +$$

$$+ \, 4 \, x_o \, v_o \, \Omega \, \tfrac{1}{4 \, \Omega} \, cosh \, (2 \, \Omega \, t')|_o^t \, \Big] \, =$$

$$= \frac{i\ m}{2\ \hbar} \Big(\frac{(x_o^2\ \Omega^2\ +\ v_o^2)}{2\ \Omega}\ senh\ (2\ \Omega\ t) +$$

$$+\ x_o\ v_o\ [cosh\ (2\ \Omega\ t)\ -\ 1)] \Big) \quad \rightarrow$$

$$\frac{i}{\hbar} \int_o^t dt' \Big[\ \frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t')\ +\ \frac{1}{2}\ m\ \Omega^2\ X^2(t')\ \Big] \ =$$

$$= \frac{i\ m}{2\ \hbar} \Big[\ \frac{1}{\Omega}\ (x_o^2\ \Omega^2\ +\ v_o^2)\ senh\ (\Omega\ t)\ cosh\ (\Omega\ t) +$$

$$+\ 2\ x_o\ v_o\ senh^2\ (\Omega\ t)\ \Big]\ . \qquad (6.4.14)$$

Agora, encontraremos a solução da expressão (6.4.5). Inicialmente, vamos tomar a seguinte equação quártica:[7]

$$x^4\ +\ b_1\ x^3\ +\ b_2\ x^2\ +\ b_3\ x\ +\ b_4\ =\ 0\ . \qquad (6.4.15)$$

Comparando-se as expressões (6.4.5,15), virá:

$$b_1\ =\ b_2\ =\ 0\ , \qquad b_3\ =\ -\ \frac{G}{\sqrt{2\ \pi}\ m\ \Omega^2}\ , \qquad (6.4.16a\text{-}c)$$

$$b_4\ =\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ \Omega^2}\ . \qquad (6.4.16d)$$

Usando-se as expressões acima, a equação cúbica correspondente à equação quártica vista acima será:[7]

$$a_o^3 - b_2\ a_o^2 + (b_1\ b_3 - 4\ b_4)\ a_o + (4\ b_2\ b_4 - b_4\ b_1^2 - b_3^2)\ =\ 0\ \rightarrow$$

$$a_o^3\ -\ 4\ b_4\ a_o\ -\ b_3^2\ =\ 0\ \rightarrow$$

$$a_o^3\ -\ \frac{\hbar^2}{m^2\ \Omega^2}\ a_o\ -\ \frac{G^2}{2\ \pi\ m^2\ \Omega^4}\ =\ 0\ \Leftrightarrow$$

$$a_o^3\ +\ c_1\ a_o^2\ +\ c_2\ a_o\ +\ c_3\ =\ 0\ \rightarrow$$

$$c_1 \;=\; 0\;, \quad c_2 \;=\; -\;\frac{\hbar^2}{m^2\;\Omega^2}\;, \qquad (6.4.17\text{a-b})$$

$$c_3 \;=\; -\;\frac{G^2}{2\;\pi\;m^2\;\Omega^4}\;. \qquad (6.4.17\text{c})$$

Para que a equação cúbica vista acima tenha uma solução real é necessário que tenhamos:[7]

$$Q^3\;+\;R^2\;>\;0\;, \qquad Q\;=\;\frac{3\;c_2\;-\;c_1^3}{9}\;, \qquad (6.4.18\text{a-b})$$

$$R\;=\;\frac{9\;c_1\;c_2\;-\;27\;c_3\;-\;2\;c_1^3}{54}\;. \qquad (6.4.18\text{c})$$

Levando-se as expressões (6.4.17a-c) nas expressões (6.4.18a-c), virá:

$$Q = -\;\frac{\hbar^2}{3\;m^2\;\Omega^2}\;, \qquad R\;=\;\frac{G^2}{4\;\pi\;m^2\;\Omega^4}\quad\to$$

$$-\;\frac{\hbar^6}{27\;m^6\;\Omega^6}\;+\;\frac{G^4}{16\;\pi^2\;m^4\;\Omega^8}\;>\;0\quad\to\quad G^4\;>\;\frac{16\;\pi^2\;\hbar^6\;\Omega^2}{27\;m^2}\quad\to$$

$$G^2\;>\;\frac{4\;\pi\;\hbar^3\;\Omega}{\sqrt{27}\;m}\quad\to\quad G\;>\;1,56\;\sqrt{\frac{\hbar^3\;\Omega}{m}}\;. \qquad (6.4.19)$$

É oportuno destacar que a condição de controle sobre G, indicada na expressão (6.4.19), pode ser de grande importância para descrever a evolução de excitações moleculares elementares.[8].

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. Em agosto de 1834, o engenheiro naval escocês John Scott Russell (1808-1882) cavalgava ao longo da margem do estreito *Canal Union*, próximo de Edinburgh, na Escócia, quando, repentinamente, observou uma onda curiosa, uma grande massa de água se propagando ao longo do canal. Em vista

disso, Russell descreveu-a como "uma grande elevação **solitária** ... arredondada, uniforme e bem definida quantidade de água, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudar de forma ou diminuir a velocidade". (RUSSELL, J. S. 1844. *Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Sciences* p. 311.) No final do Século XIX, mostrou-se que as "ondas solitárias de Russell" só poderiam ser descritas pela Dinâmica Não-Linear. Em 1965, os físicos norte-americanos Martin D. Krushall e Norman J. Zabusky descobriram um novo tipo de onda solitária que mantinha a mesma forma não somente quando se movia livremente, mas, também, quando colidia e passava através de outra onda de mesma espécie. A tais ondas deram o nome de **sólitons**. Observe-se que, no mundo digital de hoje, sinais de telefone viajam como sólitons através de quilômetros de fibras óticas. (VON BAYER, H. C. 1999. *The Sciences*, May/June, 10.)

2. HASSE, R. W. 1980. *Zeitschrift für Physik* **B37**, 83;———-1982. *Physical Review* **A25**, 583.

3. SYMON, K. R. 1961. **Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

4. NASSAR, A. B. 1998. **Gaussian Solitons**, DFUFPA (mimeo); OLIVEIRA, J. E. de 1999. **Sólitons Gaussianos**, *Tese de Mestrado*, DFUFPA.

5. GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. W. 1965. **Table of Integrals, Series and Products**. Academic Press.

6. NASSAR, op. cit.

7. ABRAMOVITZ, M. and SEGUN, I. A. (Editors) 1968. **Handbook of Mathematical Functions**. Dover Publications, Inc.

8. BROWN, D. W., WEST, B. J. and LINDENBERG, K. 1986. *Physical Review A 33*, 4110.

CAPÍTULO 7

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM E OS ESTADOS QUÂNTICOS "ESPREMIDOS" DO OSCILADOR HARMÔNICO TEMPORAL

7.1. Introdução

Neste Capítulo, estudaremos os estados "espremidos" ("squeezed") do Oscilador Harmônico Dependente do Tempo ($OHDT$), usando resultados da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm obtidos nos Capítulos 1 e 3. Inicialmente, apresentaremos o pacote de onda de de Broglie-Bohm para um potencial geral $V(x,\ t)$; em seguida, veremos a forma desse pacote para o caso do $OHDT$; e, por fim, trataremos de um caso particular desse tipo de oscilador trabalhado por A. Mostafazadeh,[1] J. Y. Ji, J. K. Kim e S. P. Kim,[2] C. F. Lo,[3] e G. S. Agarwal e S. Arun Kumar.[4]

7.2. Pacote de Onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm

Consideremos a **equação de Schrödinger** (em uma dimensão):

$$i\ \hbar\ \frac{\partial \Psi(x,\ t)}{\partial t}\ =\ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2\ \Psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ V(x,\ t)\ \Psi(x,\ t)\ . \qquad (7.2.1)$$

e a função de onda $\Psi(x,\ t)$ na forma polar ou **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (1.2.1.2)]:

$$\Psi(x,\ t)\ =\ \phi(x,\ t)\ e^{i\ S(x,\ t)}, \qquad (7.2.2)$$

onde [vide expressão (3.3.1.5)]:

$$\phi(x,\ t)\ =\ \sqrt{\rho(x,\ t)}\ . \qquad (7.2.3)$$

Consideremos, agora, a amplitude $\phi(x,\ t)$ do pacote de onda, dado pela expressão (3.3.2.1), ou seja:

$$\phi(x,\ t)\ =\ [2\ \pi\ a^2(t)]^{-\ 1/4}\ e^{-\ \frac{[x\ -\ X(t)]^2}{4\ a^2(t)}}\ , \qquad (7.2.4)$$

onde $X(t)$ representa o caminho clássico seguido pelo centro de massa do pacote.

Desse modo, demonstrou-se no Capítulo 3 que [vide expressões (3.3.2.11-12,18-20)]:

$$S(x,\ t)\ =\ S_o(t)\ +\ \frac{m\ \dot{X}(t)}{\hbar}\ [x\ -\ X(t)]\ +$$

$$+\ \frac{m\ \dot{a}(t)}{2\ \hbar\ a(t)}\ [x\ -\ X(t)]^2\ , \qquad (7.2.5)$$

$$\dot{S}_o(t)\ =\ \frac{1}{\hbar}\ \Big(\ \frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t)\ -\ V[X(t),\ t]\ -$$

$$-\ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t)}\ \Big)\ , \qquad (7.2.6)$$

$$\ddot{X}(t)\ +\ \frac{1}{m}\ V'[X(t),\ t]\ =\ 0\ , \qquad (7.2.7)$$

$$\ddot{a}(t)\ +\ \Big(\ \frac{1}{m}\ V''[X(t),\ t]\ \Big)\ a(t)\ =\ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a^3(t)}\ , \qquad (7.2.8)$$

onde:

$$S_o(t) \equiv S[X(t),\ t]\ , \qquad (7.2.9)$$

é a **ação quântica**.

7.3. Pacote de Onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm para o OHDT

No caso do $OHDT$, teremos:

$$V[X(t),\ t] \ = \ \frac{1}{2}\ m\ \Omega^2(t)\ X^2(t)\ . \qquad (7.3.1)$$

Tomando-se as expressões (7.2.5-8) e levando-se nelas a expressão (7.3.1), resultará:[5]

$$S(x,\ t) \ = \ \frac{m\ \dot{X}(t)}{\hbar}\ [x \ - \ X(t)] \ + \ \frac{m\ \dot{a}(t)}{2\ \hbar\ a(t)}\ [x \ - \ X(t)]^2 \ +$$

$$+ \ \frac{1}{\hbar} \int_o^t dt' \left(\frac{1}{2}\ m\ \dot{X}^2(t) \ - \ \frac{1}{2}\ m\ \Omega^2(t')\ X^2(t') \ - \right.$$

$$\left. - \ \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t')} \right)\ , \qquad (7.3.2)$$

$$\ddot{X}(t) \ + \ \Omega^2(t)\ X(t) \ = \ 0\ , \qquad (7.3.3)$$

$$\ddot{a}(t) \ + \ \Omega^2(t)\ a(t) \ = \ \frac{\hbar^2}{4\ m^2\ a^3(t)}\ , \qquad (7.3.4)$$

expressões essas que representam a dinâmica do pacote de onda do $OHDT$ dado pela expressão (7.2.4).

Inicialmente, resolveremos a equação diferencial representada pela expressão (7.3.4). Para isso, usaremos a técnica dos **invariantes de Ermakov-Lewis** utilizada no Capítulo 3. Portanto, consideremos as seguintes condições iniciais [vide expressões (3.3.2.21c-d)]:

$$a(0) \ = \ a_o\ , \qquad \dot{a}(0) \ = \ b_o\ . \qquad (7.3.5a\text{-}b)$$

Para obteremos a solução procurada, façamos [vide expressões (3.3.3.5a-b)]:

$$a(t) \ = \ r(\theta) \ \alpha(t) \ , \qquad d\theta \ = \ \frac{dt}{\alpha^2(t)} \ . \qquad (7.3.6\text{a-b})$$

Usando-se as expressões acima, teremos [vide expressão (3.3.3.8)]:

$$\ddot{a}(t) \ = \ r(\theta) \ \ddot{\alpha}(t) \ + \ \frac{r''(\theta)}{\alpha^3(t)} \ , \qquad (7.3.7\text{a})$$

onde:

$$r''(\theta) \ = \ \frac{d^2 r(\theta)}{d\theta^2} \ . \qquad (7.3.7\text{b})$$

Tomando-se a expressão (7.3.4), substituindo-se nela as expressões (7.3.6a,7a) e considerando-se que [vide expressão (3.3.3.4b)]:

$$k \ = \ \frac{\hbar}{2 \ m} \ , \qquad (7.3.8)$$

teremos:

$$r(\theta) \ \ddot{\alpha}(t) \ + \ \frac{r''(\theta)}{\alpha^3(t)} \ + \ \Omega^2 \ r(\theta) \ \alpha(t) \ = \ \frac{k^2}{r^3(\theta) \ \alpha^3(t)} \ \ \rightarrow$$

$$\ddot{\alpha}(t) \ + \ \Omega^2(t) \ \alpha(t) \ + \ \frac{r''(\theta)}{r(\theta) \ \alpha^3(t)} \ = \ \frac{k^2}{r^4(\theta) \ \alpha^3(t)} \ . \qquad (7.3.9)$$

Fazendo-se:[5]

$$\ddot{\alpha}(t) \ + \ \Omega^2(t) \ \alpha(t) \ = \ 0 \ , \qquad (7.3.10)$$

na expressão (7.3.9), resultará:

$$\frac{r''(\theta)}{r(\theta) \ \alpha^3(t)} \ = \ \frac{k^2}{r^4(\theta) \ \alpha^3(t)} \ \ \rightarrow$$

$$r''(\theta) \ = \ \frac{k^2}{r^3(\theta)} \ . \qquad (7.3.11)$$

Multiplicando-se as expressões (7.3.4) e (7.3.10), respectivamente, por $\alpha(t)$ e $a(t)$, subtraindo-se os resultados, e usando-se a expressão (7.3.8), virá:

$$\alpha(t)\ \ddot{a}(t)\ -\ \ddot{\alpha}(t)\ a(t)\ =\ k^2\ \frac{\alpha(t)}{a^3(t)}\ \ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ =\ k^2\ \frac{\alpha(t)}{a^3(t)}\ .$$

Multiplicando-se ambos os membros da expressão acima por $[\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]$, obteremos:

$$[\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ \frac{d}{dt}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ =$$

$$=\ k^2\ \frac{\alpha(t)}{a(t)}\ \frac{[\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]}{a^2(t)}\ \ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\ \Big(\ \frac{1}{2}\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]\ \Big)^2\ =$$

$$=\ -\ k^2\ \frac{\alpha(t)}{a(t)}\ \frac{d}{dt}\ [\frac{\alpha(t)}{a(t)}]\ =\ -\ \frac{k^2}{2}\ \frac{d}{dt}\ [\frac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \Big(\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]^2\ +\ k^2\ [\frac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ \Big)\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$I_1\ =\ [\alpha(t)\ \dot{a}(t)\ -\ \dot{\alpha}(t)\ a(t)]^2\ +\ k^2\ [\frac{\alpha(t)}{a(t)}]^2\ . \qquad (7.3.12)$$

Sendo as expressões (7.3.12) e (3.3.3.11) idênticas, poderemos seguir o mesmo procedimento algébrico do item 3.3.3. Desse modo, poderemos escrever que [vide expressões (3.3.3.12, 15,17,18a-c)]:

$$I_1\ =\ [r'(\theta)]^2\ +\ \frac{k^2}{r^2(\theta)}\ , \qquad (7.3.13)$$

$$\theta\ +\ I_2\ =\ \frac{1}{I_1}\ \sqrt{I_1\ \omega(\theta)\ -\ k^2}\ , \qquad (7.3.14)$$

$$a^2(t) \ = \ \Big(\ \tfrac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ \Big) \ \alpha_1^2(t) \ + \ I_1 \ \alpha_2^2(t) \ +$$

$$+ \ 2 \ I_1 \ I_2 \ \alpha_1(t) \ \alpha_2(t) \ , \qquad (7.3.15)$$

onde:

$$\omega(\theta) \ = \ r^2(\theta) \ , \qquad \theta \ = \ \int^t \tfrac{dt'}{\alpha^2(t')} \ , \qquad (7.3.16\text{a-b})$$

$$\alpha_1(t) \equiv \alpha(t) \ , \qquad \alpha_2(t) \equiv \alpha(t) \ \int^t \tfrac{dt'}{\alpha^2(t')} \ , \qquad (7.3.17\text{a-b})$$

com $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ representando duas soluções independentes da expressão (7.3.10), e I_1 e I_2 são os **invariantes de Ermakov-Lewis**.

Agora, determinemos esses invariantes usando-se as seguintes condições iniciais:

$$\alpha(0) \ = \ 1 \ , \qquad \dot{\alpha}(0) \ = \ 0 \ . \qquad (7.3.18\text{a-b})$$

Desse modo, usando-se as expressões acima nas expressões (7.3.17a-b), obteremos:

$$\alpha_1(0) \ = \ 1 \ , \qquad \alpha_2(0) \ = \ 0 \ , \qquad (7.3.19\text{a-b})$$

$$\dot{\alpha}_1(0) \ = \ 0 \ , \qquad \dot{\alpha}_2(0) \ = \ 1 \ . \qquad (7.3.19\text{c-d})$$

Considerando-se a expressão (7.3.15) e inserindo-se nela as expressões (7.3.5a,8,19a-b), resultará:

$$a^2(0) \ = \ \Big(\ \tfrac{\hbar^2}{4 \ m^2 \ I_1} + I_1 \ I_2^2 \Big) \ 1^2 + I_1 \times 0^2 + 2 \ I_1 \ I_2 \times 1 \times 0 \ \ \rightarrow$$

$$a_o^2 \ = \ \tfrac{k^2}{I_1} \ + \ I_1 \ I_2^2 \ . \qquad (7.3.20)$$

Tomando-se a expressão (7.3.15), derivando-a em relação ao tempo t e substituindo-se no resultado as expressões (7.3.5a-b,8,19a-d), teremos:

$$2\ a(t)\ \dot{a}(t)\ =\ \left(\frac{\hbar^2}{4\ m^2\ I_1}\ +\ I_1\ I_2^2\right)\ 2\ \alpha_1(t)\ \dot{\alpha}_1(t)\ +$$

$$+\ I_1\ 2\ \alpha_2(t)\ \dot{\alpha}_2(t)\ +\ 2\ I_1\ I_2\ [\dot{\alpha}_1(t)\ \alpha_2(t)\ +\ \alpha_1(t)\ \dot{\alpha}_2(t)]\ \rightarrow$$

$$2\ a_o\ b_o\ =\ (\tfrac{k^2}{I_1}\ +\ I_1\ I_2^2)\ 2\times 1\times 0\ +\ I_1\times 2\times 0\times 1\ +$$

$$+\ 2\ I_1\ I_2\ (0\times 0\ +\ 1\times 1)\ \rightarrow\ a_o\ b_o\ =\ I_1\ I_2\ \rightarrow$$

$$I_2\ =\ \frac{a_o\ b_o}{I_1}\ . \qquad (7.3.21)$$

Trabalhando-se com as expressões (7.3.20-21), virá:

$$a_o^2\ =\ \frac{k^2}{I_1}\ +\ \frac{I_1\ a_o^2\ b_o^2}{I_1^2}\ =\ \frac{k^2\ +\ a_o^2\ b_o^2}{I_1}\ \rightarrow$$

$$I_1\ =\ \frac{k^2\ +\ a_o^2\ b_o^2}{a_o^2}\ . \qquad (7.3.22)$$

Definindo-se [vide expressões (3.2.2.23a), (3.3.3.25b) e (7.3.8)]:

$$\tau\ =\ \frac{2\ m\ a_o^2}{\hbar}\ =\ \frac{a_o^2}{k}, \qquad \frac{\zeta}{\tau}\ =\ \frac{b_o}{a_o}\ , \qquad (7.3.23\text{a-b})$$

e usando-se as expressões (7.3.21-22) poderemos escrever que:

$$I_1\ =\ a_o^2\ (\tfrac{k^2}{a_o^4}\ +\ \tfrac{b_o^2}{a_o^2})\ =\ a_o^2\ (\tfrac{1}{\tau^2}\ +\ \tfrac{\zeta^2}{\tau^2})\ \rightarrow$$

$$I_1\ =\ a_o^2\ (\tfrac{1\ +\ \zeta^2}{\tau^2})\ , \qquad (7.3.24\text{a})$$

$$I_1 \; I_2 \; = \; a_o^2 \, \frac{b_o}{a_o} \; = \; a_o^2 \, \frac{\zeta}{\tau} \; . \qquad (7.3.24b)$$

Tomando-se a expressão (7.3.15), inserindo-se nela as expressões (7.3.24a-b) e considerando-se as expressões (7.3.8, 17a-b,21-22), obteremos:

$$a^2(t) \; = \; (\frac{k^2}{I_1} \; + \; I_1 \, \frac{a_o^2 \; b_o^2}{I_1^2}) \; \alpha_1^2(t) \; + \; I_1 \; \alpha_2^2(t) \; +$$

$$+ \; 2 \; I_1 \; I_2 \; \alpha_1(t) \; \alpha_2(t) \; = \; (\frac{k^2 \; + \; a_o^2 \; b_o^2}{I_1}) \; \alpha_1^2(t) \; + \; I_1 \; \alpha_2^2(t) \; +$$

$$+ \; 2 \; I_1 \; I_2 \; \alpha_1(t) \; \alpha_2(t) \quad \rightarrow$$

$$a^2(t) \; = \; a_o^2 \left[\, \alpha_1^2(t) + \left(\, \frac{2 \; \zeta}{\tau} \, \right) \alpha_1(t) \; \alpha_2(t) + \left(\, \frac{1 \; + \; \zeta^2}{\tau^2} \, \right) \alpha_2^2(t) \, \right] \; =$$

$$= \; a_o^2 \; \alpha^2(t) \left[\, 1 \; + \; \left(\, \frac{2 \; \zeta}{\tau} \, \right) \left(\, \int^t \frac{dt'}{\alpha^2(t')} \, \right) \; + \right.$$

$$\left. + \left(\, \frac{1 \; + \; \zeta^2}{\tau^2} \, \right) \left(\, \int^t \frac{dt'}{\alpha^2(t')} \, \right)^2 \, \right] \; , \qquad (7.3.25a\text{-}b)$$

expressões essas que representam a largura do pacote de onda do $OHDT$, cujo centro de gravidade evolue com $X(t)$, com as seguintes condições iniciais [vide expressões (3.3.2.21a-b)]:

$$X(0) \; = \; x_o \; , \qquad \dot{X}(0) \; = \; v_o \; . \qquad (7.3.26a\text{-}b)$$

Determinemos $X(t)$. Sendo as equações diferenciais representadas pelas expressões (7.3.3,10) idênticas, poderemos escrever $X(t)$ como uma combinação linear das soluções independentes $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ da equação diferencial dada pela expressão (7.3.10), ou seja:

$$X(t) \; = \; C_1 \; \alpha_1(t) \; + \; C_2 \; \alpha_2(t) \; , \qquad (7.3.27a)$$

$$\dot{X}(t) \ = \ C_1 \ \dot{\alpha}_1(t) \ + \ C_2 \ \dot{\alpha}_2(t) \ . \qquad (7.3.27b)$$

Para determinarmos as constantes C_1 e C_2 usaremos as expressões (7.3.19a-d,26a-b,27a-b). Portanto, teremos:

$$X(0) \ = \ x_o \ = \ C_1 \ \alpha_1(0) \ + \ C_2 \ \alpha_2(0) \ \ \rightarrow$$

$$C_1 \ = \ x_o \ , \qquad (7.3.28a)$$

$$\dot{X}(0) \ = \ v_o \ = \ C_1 \ \dot{\alpha}_1(0) \ + \ C_2 \ \dot{\alpha}_2(0) \ \ \rightarrow$$

$$C_2 \ = \ v_o \ . \qquad (7.3.28b)$$

Desse modo, levando-se as expressões (7.3.28a-b) na expressão (7.3.27a) e usando-se as expressões (7.3.17a-b), resultará:

$$X(t) \ = \ x_o \ \alpha_1(t) \ + \ v_o \ \alpha_2(t) \ =$$

$$= \ x_o \ \alpha(t) \ + \ v_o \ \alpha(t) \ \int^t \frac{dt'}{\alpha^2(t')} \ \ \rightarrow$$

$$X(t) \ = \ \alpha(t) \ \Big[\ x_o \ + \ v_o \ \int^t \frac{dt'}{\alpha^2(t')} \ \Big] \ . \qquad (7.3.29)$$

Por fim, o pacote de onda completo será escrito na forma final usando-se as expressões (7.2.2,4) e (7.3.2):

$$\psi(x, \ t) \ = \ [2 \ \pi \ a^2(t)]^{- \ 1/4} \ exp \Big(\ - \ \frac{[x \ - \ X(t)]^2}{4 \ a^2(t)} \ \Big) \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{\hbar} \ \Big(\ \frac{m \ \dot{a}(t)}{2 \ a(t)} \ [x \ - \ X(t)]^2 \ + \ m \ \dot{X}(t) \ [x \ - \ X(t)] \ \Big) \ \Big] \ \times$$

$$\times \ exp \ \Big[\ \frac{i}{\hbar} \ \int_o^t dt' \ \Big(\ \frac{m}{2} \ \dot{X}^2(t') \ - \ \frac{m}{2} \ \Omega^2(t') \ X^2(t') \ -$$

$$- \frac{\hbar^2}{4\ m\ a^2(t')} \Big) \Big] . \qquad (7.3.30)$$

A expressão acima nos mostra que o pacote de onda que circunda a posição da partícula clássica e o centro de gravidade do pacote seguem a trajetória clássica; e mais ainda, sua evolução temporal é completamente determinada pelas soluções quântica e clássica das expressões (7.3.25a-b,29), respectivamente. No momento de observação, o pacote se move com uma velocidade inicial v_o e espalha-se com uma taxa inicial b_o. A variância associada de x (incerteza ao quadrado) pode ser escrita como [vide expressão (3.3.2.7)]:

$$\Big[\frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} \Big]^2 = \Big[\frac{x_{qu}(t)\ -\ X(t)}{x_{qu}(0)\ -\ X(0)} \Big]^2 =$$

$$= \Big[\frac{a(t)}{a(0)} \Big]^2 , \qquad (7.3.31)$$

que exibe os **estados "esprimidos"** generalizados para o $OHDT$. Registre-se que o método que utilizamos neste Capítulo nós dá uma solução geral para o $OHDT$ quântico a partir de uma solução particular $\alpha(t)$ para a equação clássica representada pela expressão (7.3.10).

7.4. Pacote de Onda de Schrödinger-de Broglie-Bohm para um Particular OHDT

Tomemos o caso particular do $OHDT$ considerado por Mostafazadeh,[1] Ji, Kim e Kim,[2], Lo,[3] e Agarwal e Kumar,[4] ou seja:

$$\Omega^2(t) = \Omega_o^2 , \quad (-\infty < t < 0) , \qquad (7.4.1a)$$

$$\Omega^2(t) = \Omega_o^2\ (1 + \frac{\beta_o\ t}{T}), \quad (0 \leq t \leq T) , \qquad (7.4.1b)$$

$$\Omega^2(t) = \Omega_o^2\ (1 + \beta_o). \quad (T < t < \infty) . \qquad (7.4.1c)$$

Vejamos, agora, a solução da equação diferencial representada pela expressão (7.3.10), para as três situações indicadas acima.

a) $\underline{-\infty < t < 0}$

Neste caso, tomando-se a expressão (7.3.10) e usando-se nela a expressão (7.4.1a), resultará:

$$\ddot{\alpha}(t) + \Omega_o^2 \, \alpha(t) = 0 \, , \qquad (7.4.2)$$

e sua solução será dada por:[6]

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \, , \qquad (7.4.3a)$$

onde:

$$\alpha_1(t) = C_3 \, cos \, (\Omega_o \, t) \, , \qquad (7.4.3b)$$

$$\alpha_2(t) = C_4 \, sen \, (\Omega_o \, t) \, , \qquad (7.4.3c)$$

$$\dot{\alpha}_1(t) = - \, C_3 \, \Omega_o \, sen \, (\Omega_o \, t) \, , \qquad (7.4.3d)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = C_4 \, \Omega_o \, cos \, (\Omega_o \, t) \, . \qquad (7.4.3e)$$

Para determinarmos as constantes C_3 e C_4 usaremos as expressões (7.3.19a,d) e (7.4.2b,e). Portanto, teremos:

$$\alpha_1(0) = 1 = C_3 \, cos \, 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = 1 \, , \qquad (7.4.4a)$$

$$\dot{\alpha}_2(0) = 1 = C_4 \, \Omega_o \, cos \, 0^o \quad \rightarrow$$

$$C_4 = \frac{1}{\Omega_o} \, , \qquad (7.4.4b)$$

$$\alpha_1(t) = cos \, (\Omega_o \, t) \, , \qquad (7.4.4c)$$

$$\alpha_2(t) \ = \ \frac{1}{\Omega_o} \ sen \ (\Omega_o \ t). \qquad (7.4.4d)$$

Considerando-se a expressão (7.3.25a) e substituindo-se nela as expressões (7.4.4c-d), virá:

$$a^2(t) \ = \ a_o^2 \ \Big[\ cos^2(\Omega_o \ t) \ + \ \Big(\ \frac{2 \ \zeta}{\Omega_o \ \tau} \ \Big) \ cos \ (\Omega_o \ t) \ sen \ (\Omega_o \ t) \ +$$

$$+ \ \Big(\ \frac{1 \ + \ \zeta^2}{\Omega_o^2 \ \tau^2} \ \Big) \ sen^2 \ (\Omega_o^2 \ t) \ \Big] \ . \qquad (7.4.5)$$

b) $\underline{0 \leq t \leq T}$

Neste caso, tomando-se a expressão (7.3.10) e levando-se nela a expressão (7.4.1b), virá:

$$\ddot{\alpha}(t) \ + \ \Omega_o^2 \ (1 \ + \ \frac{\beta_o}{T} \ t) \ \alpha(t) \ =$$

$$= \ \ddot{\alpha}(t) \ + \ \Omega_o^2 \ \frac{\beta_o}{T} \ (t \ + \ \frac{T}{\beta_o}) \ \alpha(t) \ = \ 0 \ . \qquad (7.4.6a\text{-}b)$$

Para resolvermos a equação diferencial acima, consideremos que:[4]

$$t \ + \ \frac{T}{\beta_o} \ = \ \eta(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d\eta}{dt} \ = \ 1 \ . \qquad (7.4.7a\text{-}b)$$

Desse modo, usando-se as expressões (7.4.6b,7a-b), virá:

$$\ddot{\alpha}(t) \ + \ \frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \ \eta(t) \ \alpha(t) \ = \ 0 \ , \qquad (7.4.8)$$

$$\dot{\alpha} \ = \ \frac{d\alpha}{dt} \ = \ \frac{d\alpha}{d\eta} \ \frac{d\eta}{dt} \ = \ \frac{d\alpha}{d\eta} \ , \qquad (7.4.9a)$$

$$\ddot{\alpha} \ = \ \frac{d}{dt} \ \frac{d\alpha}{dt} \ = \ \frac{d}{d\eta} \ \frac{d\alpha}{dt} \ \frac{d\eta}{dt} \ =$$

$$= \ \frac{d}{d\eta} \ (\frac{d\alpha}{d\eta}) \ = \ \frac{d^2\alpha}{d\eta^2} \ . \qquad (7.4.9b)$$

Tomando-se a expressão (7.4.8) e inserindo-se nela a expressão (7.4.9b), obteremos:

$$\frac{d^2\alpha}{d\eta^2} + \frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \eta \alpha = 0 . \qquad (7.4.10)$$

Agora, façamos a seguinte transformação:[4]

$$z = \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/2} \eta^{3/2} . \qquad (7.4.11a)$$

Usando-se a expressão (7.4.7a) na expressão acima, teremos:

$$z = \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/2} \left(t + \frac{T}{\beta_o} \right)^{3/2} . \qquad (7.4.11b)$$

A expressão (7.4.11a) nos mostra que:

$$\eta = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{T}{\Omega_o^2 \beta_o} \right)^{1/3} z^{2/3} , \qquad (7.4.12)$$

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/2} \frac{3}{2} \eta^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{\Omega_o^2 \beta_o} \right)^{1/6} z^{1/3} \quad \to$$

$$\frac{dz}{d\eta} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/3} z^{1/3} , \qquad (7.4.13a)$$

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{d\alpha}{dz} \frac{dz}{d\eta} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/3} z^{1/3} \frac{d\alpha}{dz} , \qquad (7.4.13b)$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} \frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{d}{dz} \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{dz}{d\eta} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/3} z^{1/3} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \beta_o}{T} \right)^{1/3} z^{1/3} \frac{d\alpha}{dz} \right] =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \right)^{2/3} z^{1/3} \left(z^{1/3} \ \frac{d^2\alpha}{dz^2} \ + \ \frac{1}{3} \ z^{- \ 2/3} \ \frac{d\alpha}{dz} \right) \quad \to$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\eta^2} \ = \ \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \right)^{2/3} \times$$

$$\times \left(z^{2/3} \ \frac{d^2\alpha}{dz^2} \ + \ \frac{1}{3} \ z^{- \ 1/3} \ \frac{d\alpha}{dz} \right) . \qquad (7.3.13c)$$

Considerando-se a expressão (7.4.10) e substituindo-se nela as expressões (7.4.12,13c), resultará:

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \right)^{2/3} \left(z^{2/3} \ \frac{d^2\alpha}{dz^2} \ + \ \frac{1}{3} \ z^{- \ 1/3} \ \frac{d\alpha}{dz} \right) +$$

$$+ \ \frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{T}{\Omega_o^2 \ \beta_o} \right)^{1/3} z^{2/3} \ \alpha \ =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \right)^{2/3} \left(z^{2/3} \ \frac{d^2\alpha}{dz^2} \ + \ \frac{1}{3} \ z^{- \ 1/3} \ \frac{d\alpha}{dz} \right) +$$

$$+ \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Omega_o^2 \ \beta_o}{T} \right)^{2/3} z^{2/3} \ \alpha \ = \ 0 \quad \to$$

$$z^{2/3} \ \frac{d^2\alpha(z)}{dz^2} \ + \ \frac{1}{3} \ z^{- \ 1/3} \ \frac{d\alpha(z)}{dz} \ + \ z^{2/3} \ \alpha(z) \ = \ 0 \ . \qquad (7.4.14)$$

Para resolvermos a equação diferencial acima, façamos a seguinte mudança de variável:

$$\alpha(z) \ = \ z^{1/3} \ y(z) \ . \qquad (7.4.15)$$

Assim, usando-se a expressão acima, teremos:

$$\frac{d\alpha}{dz} \ = \ z^{1/3} \ \frac{dy}{dz} \ + \ \frac{1}{3} \ z^{- \ 2/3} \ y \ , \qquad (7.4.16a)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} \ = \ z^{1/3} \ \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{3} \ z^{- \ 2/3} \ \frac{dy}{dz} + \frac{1}{3} \left(- \ \frac{2}{3} \ z^{- \ 5/3} \ y + z^{- \ 2/3} \ \frac{dy}{dz}\right) \ =$$

$$= z^{1/3}\ \frac{d^2y}{dz^2}\ +\ \frac{1}{3}\ z^{-\ 2/3}\ \frac{dy}{dz}\ -\ \frac{2}{9}\ z^{-\ 5/3}\ y\ +\ \frac{1}{3}\ z^{-\ 2/3}\ \frac{dy}{dz}\quad \to$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}\ =\ z^{1/3}\ \frac{d^2y}{dz^2}\ +\ \frac{2}{3}\ z^{-\ 2/3}\ \frac{dy}{dz}\ -\ \frac{2}{9}\ z^{-\ 5/3}\ y\ . \qquad (7.4.16b)$$

Tomando-se a expressão (7.4.14) e inserindo-se nela as expressões (7.4.15,16a-b), teremos:

$$z^{2/3}\ (z^{1/3}\ \frac{d^2y}{dz^2}\ +\ \frac{2}{3}\ z^{-\ 2/3}\ \frac{dy}{dz}\ -\ \frac{2}{9}\ z^{-\ 5/3}\ y)\ +$$

$$+\ \frac{1}{3}\ z^{-\ 1/3}\ (z^{1/3}\ \frac{dy}{dz}\ +\ \frac{1}{3}\ z^{-\ 2/3}\ y)\ +\ z^{2/3}\ z^{1/3}\ y\ =$$

$$= z\ \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{3}\ \frac{dy}{dz} - \frac{2}{9}\ z^{-\ 1}\ y + \frac{1}{3}\ \frac{dy}{dz} + \frac{1}{9}\ z^{-\ 1}\ y + z\ y\ =\ 0\ \to$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}\ +\ \frac{1}{z}\ \frac{dy}{dz}\ +\ (1\ -\ \frac{1}{9\ z^2})\ y\ =\ 0. \qquad (7.4.17)$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:[7]

$$y(z)\ =\ A\ J_{1/3}(z)\ +\ B\ Y_{1/3}(z)\ . \qquad (7.4.18)$$

Substituindo-se a expressão (7.4.18) na expressão (7.4.15) e usando-se a expressão (7.4.11a), teremos [lembrar que $\eta(t)$ e $z(t)$, segundo as expressões (7.4.7a,11b)]:

$$\alpha(t)\ =\ \alpha_1(t)\ +\ \alpha_2(t)\ , \qquad (7.4.19)$$

onde:

$$\alpha_1(t)\ =\ \Big[\ \frac{2}{3}\ \Big(\ \frac{\Omega_o^2\ \beta_o}{T}\ \Big)^{1/2}\ \eta^{3/2}\ \Big]^{1/3}\ [A\ J_{1/3}(z)]\ =$$

$$=\ C_5\ \sqrt{\eta}\ J_{1/3}(z)\ , \qquad (7.4.20a)$$

$$\alpha_2(t)\ =\ \Big[\ \frac{2}{3}\ \Big(\ \frac{\Omega_o^2\ \beta_o}{T}\ \Big)^{1/2}\ \eta^{3/2}\ \Big]^{1/3}\ [B\ Y_{1/3}(z)]\ =$$

$$= \; C_6 \; \sqrt{\eta} \; Y_{1/3}(z) \; , \qquad (7.4.20b)$$

$$\dot{\alpha}_1(t) \; = \; C_5 \; \tfrac{d}{dt} \; [\sqrt{\eta(t)} \; J_{1/3}(z)] \; , \qquad (7.4.20c)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) \; = \; C_6 \; \tfrac{d}{dt} \; [\sqrt{\eta(t)} \; Y_{1/3}(z)] \; . \qquad (7.4.20d)$$

Para determinarmos as constantes C_5 e C_6, usaremos as expressões (7.3.19a-d) e (7.4.20a-d). Portanto:

$$\alpha_1(0) \; = \; 1 \; = \; C_5 \; \sqrt{\eta_o} \; J_{1/3}(z_o) \; , \qquad (7.4.21a)$$

$$\dot{\alpha}_1(0) \; = \; 0 \; = \; C_5 \; \tfrac{d}{dt} \; [\sqrt{\eta(t)} \; J_{1/3}(z)] \; |_{t=o} \; , \qquad (7.4.21b)$$

$$\alpha_2(0) \; = \; 0 \; = \; C_6 \; \sqrt{\eta_o} \; Y_{1/3}(z_o) \; , \qquad (7.4.22a)$$

$$\dot{\alpha}_2(0) \; = \; 1 \; = \; C_6 \; \tfrac{d}{dt} \; [\sqrt{\eta(t)} \; Y_{1/3}(z)] \; |_{t=o} \; , \qquad (7.4.22b)$$

onde [vide expressões (7.4.7a,11b)]:

$$\eta(0) \; = \; \eta_o \; = \; \tfrac{T}{\beta_o} \; , \qquad (7.4.23a)$$

$$z(0) \; = \; z_o \; = \; \tfrac{2}{3} \; \Big(\; \tfrac{\Omega_o^2 \; \beta_o}{T} \; \Big)^{1/2} \; \Big(\; \tfrac{T}{\beta_o} \; \Big)^{3/2} \quad \rightarrow$$

$$z_o \; = \; \tfrac{2 \; \Omega_o \; T}{3 \; \beta_o} . \qquad (7.4.23b)$$

Por fim, considerando-se as expressões (7.3.25a) e (7.4.20a-b), poderemos escrever que:

$$a^2(t) \; = \; a_o^2 \; \eta(t) \; \Big[\; C_5^2 \; J_{1/3}^2(z) \; + \; \Big(\; \tfrac{2 \; \zeta}{\tau} \; \Big) \; C_5 \; C_6 \; J_{1/3}(z) \; Y_{1/3}(z) \; +$$

$$+ \left(\frac{1 + \zeta^2}{\tau^2} \right) C_6^2 \; Y_{1/3}^2(z) \Big] . \qquad (7.4.24)$$

Chamando-se:

$$\bar{J}_{1/3}(z) \; = \; C_5 \; J_{1/3}(z) \; , \qquad (7.4.25a)$$

$$\bar{Y}_{1/3}(z) \; = \; \Omega_o^2 \; (\tfrac{T}{\beta_o}) \; C_6 \; Y_{1/3}(z) \; , \qquad (7.4.25b)$$

a expressão (7.4.24) tomará a seguinte forma:[8]

$$a^2(t) \; = \; a_o^2 \; \eta(t) \Big[\; \bar{J}_{1/3}^2(z) \; + \; \left(\frac{2 \; \zeta}{\tau \; \Omega_o^2 \; (T/\beta_o)} \right) \bar{J}_{1/3}(z) \; \bar{Y}_{1/3}(z) \; +$$

$$+ \left(\frac{1 \; + \; \zeta^2}{\tau^2 \; \Omega_o^4 \; (T/\beta_o)^2} \right) \bar{Y}_{1/3}^2(z) \Big] . \qquad (7.4.26)$$

c) $\underline{T \; < \; t \; < \; \infty}$

Neste caso, considerando-se a expressão (7.3.10) e substituindo-se nela a expressão (7.4.1c), virá:

$$\ddot{\alpha}(t) \; + \; \Omega_o^2 \; (1 \; + \; \beta_o) \; \alpha(t) \; = \; 0 \; , \qquad (7.4.27)$$

e sua solução, em analogia com o caso a, será dada por:

$$a^2(t) \; = \; a_o^2 \; \Big[\; cos^2(\Omega_o \; \sqrt{1 \; + \; \beta_o} \; t) \; +$$

$$+ \left(\frac{2 \; \zeta}{\Omega_o \; \sqrt{1 \; + \; \beta_o} \; \tau} \right) cos \; (\Omega_o \; \sqrt{1 \; + \; \beta_o} \, t) \; sen \; (\Omega_o \; \sqrt{1 \; + \; \beta_o} \, t) \; +$$

$$+ \left(\frac{1 \; + \; \zeta^2}{\Omega_o^2 \; (1 \; + \; \beta_o) \; \tau^2} \right) sen^2 \; (\Omega_o^2 \; \sqrt{1 \; + \; \beta_o} \; t) \Big] . \qquad (7.4.28)$$

A análise das expressões (7.4.5,26,28) vistas acima nos mostra que se fizermos nelas $\zeta \; = \; 0$, obtêm-se os resultados das Referências [1-4].

É oportuno registrar que as novas propriedades dispersivas do sistema físico considerado, assim como a energia cinética da partícula, dependem enfaticamente do parâmetro ζ, porque este parâmetro é uma conseqüência direta do "pacote de onda debroglieano", cuja velocidade é dada pela expressão (3.3.1.6). Registre-se, também, que essas propriedades não são aparentes quando se usa o formalismo das representações de Heisenberg e de Schrödinger.[1−4,9−10]

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. MOSTAFAZADEH, A. 1997. *Physical Review A55*, 1653; —— 1997. *Physical Review A55*, 4084; —— 1998. *Journal Physics A31*, 6495.
2. JI, J. Y, KIM, J. K. and KIM, S. P. 1995. *Physical Review A51*, 4268.
3. LO, C. F. 1991. *Physical Review A43*, 404.
4. AGARWAL, G. S. and KUMAR, S. A. 1991. *Physical Review Letters 67*, 3665.
5. NASSAR, A. B. 1998. **New Quantum Squeezed States for the Time-Dependent Harmonic Oscillator**, DFUFPA (mimeo); SOUZA, J. F. de 1999. **Aproximação de de Broglie-Bohm para Osciladores Harmônicos Dependentes do Tempo**, *Tese de Mestrado*, DFUFPA.
6. SYMON, K. R. 1961. **Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
7. WATSON, G. N. 1966. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions**. Cambridge University Press.
8. NASSAR, A. B. 2001. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics 3*, S1.
9. BROWN, L. S. 1991. *Physical Review Letters 66*, 527.
10. SUTHERLAND, B. 1998. *Physical Review Letters 80*, 3678.

CAPÍTULO 8

MECÂNICA QUÂNTICA DE DE BROGLIE-BOHM

E O EFEITO RAMSAUER-TOWNSEND

8.1. Introdução

Neste Capítuloe, estudaremos o **efeito Ramsauer-Townsend** usando resultados da Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm obtidos nos Capítulos 1 e 5. Inicialmente, apresentaremos o estudo desse efeito por intermédio da Mecânica Quântica de Schrödinger. Em seguida, trataremos esse efeito por intermédio da **equação de Kostin**, o que significa considerar a dissipação nesse processo de espalhamento de elétrons através de poços de potencial com bordas aguçadas ("sharp-edged"). Ainda neste Apêndice, apresentaremos um breve estudo do tunelamento em barreiras com esse mesmo tipo de bordas.

Em 1921,[1] o físico alemão Carl Wilhelm Ramsauer (1879-1955) estudou o espalhamento de elétrons de muita baixa energia ($0.75 - 1.1\ eV$) nos gases inertes argônio (A), kriptônio (Kr) e xenônio (Xe). Para o argônio, por exemplo, observou que a secção de choque efetiva desse espalhamento era muito maior do que a calculada pela Teoria Cinética dos Gases. Uma extensão dessa observação, ainda em 1921,[2] a uma faixa maior de energia dos elétrons revelou uma surpreendente variação na secção de choque.

Logo depois, em 1922,[3] os físicos ingleses Sir John Sealy Edward Townsend (1868-1957) e V. A. Bailey examinaram aquele espalhamento, para elétrons de energia no intervalo $0.2 - 0.8\ eV$, e, usando um método diferente do usado por Ramsauer, encontraram que o máximo do livre caminho

do elétron ocorre em torno de 0.39 eV. Esse resultado (que ficou conhecido como **efeito Ramsauer-Towsend**) foi confirmado por Ramsauer e Kollath, em 1929,[4] significa que aqueles gases nobres eram transparentes para uma energia cinética crítica.[5,6]

8.2. <u>**Efeito Ramsauer-Townsend via Mecânica Quântica de Schrödinger**</u>

Seja a **equação de Schrödinger linear** definida pela expressão (1.2.1.1), isto é:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial \psi(x,\ t)}{\partial t} \ = \ -\ \frac{\hbar^2}{2\ m}\ \frac{\partial^2\ \psi(x,\ t)}{\partial x^2}\ +$$

$$+\ V(x,\ t)\ \psi(x,\ t)\ . \qquad (8.2.1)$$

Consideremos um fluxo estacionário de partículas com energia incidente E, atravessando um poço de potencial de profundidade V e de largura L:

$$V(x,\ t)\ =\ 0\ , \qquad\qquad x \neq 0,\ L, \qquad (8.2.2a)$$

$$V(x,\ t)\ =\ -\ V\ , \qquad\qquad 0\ < x\ <\ L\ , \qquad (8.2.2b)$$

e que definem as seguintes regiões:

<u>Região (1) de Incidência</u>: $x\ <\ 0$, (8.2.3a)

<u>Região (2) de Espalhamento</u>: $0\ <\ x\ <\ L$, (8.2.3b)

<u>Região (3) de Transmissão</u>: $x\ >\ qL$. (8.2.3c)

Considerando-se que $E\ >\ 0$, a solução da **equação de Schrödinger** [vide expressão (8.2.1)] para as três regiões definidas acima é dada por:[7]

$$\psi_1(x,\ t)\ =\ (e^{i\ k_1\ x}\ +\ A\ e^{-\ i\ k_1\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (8.2.4a)$$

$$\psi_2(x,\ t)\ =\ (C\ e^{i\ k_2\ x}\ +\ D\ e^{-\ i\ k_2\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (8.2.4b)$$

$$\psi_3(x,\ t)\ =\ (B\ e^{i\ k_1\ x})\ e^{-\ i\ \omega\ t}\ , \qquad (8.2.4c)$$

onde:

$$k_1^2\ =\ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2}\ , \qquad k_2^2\ =\ \frac{2\ m\ (E\ +\ V)}{\hbar^2}\ . \qquad (8.2.5a\text{-}b)$$

Levando em conta que, no tunelamento estudado no Capítulo 5, $V > 0$ e que, no espalhamento objeto deste Apêndice, $V < 0$, as expressões (5.2.1.4a-b) e (8.2.5a-b) nos mostram que:

$$k \equiv k_1\ , \qquad (8.2.6a)$$

$$\bar{q}^2\ =\ -\ \frac{2\ m\ (E\ +\ V)}{\hbar^2}\ =\ -\ k_2^2\ \ \rightarrow\ \ \bar{q}\ =\ i\ k_2\ . \qquad (8.2.6b)$$

Assim, as constantes A e B, que determinam o **coeficiente de reflexão** $\mid R\mid^2\ =\ A\ A^*$ e o **coeficiente de transmissão** $\mid T\ \mid^2\ =\ B\ B^*$, poderão ser obtidas por intermédio das expressões (5.2.1.9) e (5.2.1.13) substituindo-se nestas as expressões (8.2.6a-b). Desse modo, teremos [deveremos lembrar a **fórmula de Euler**: $e^{\pm\ i\ \alpha}\ =\ cos\ \alpha\ \pm\ i\ sen\ \alpha$ e que $senh\ (i\ \alpha)\ =\ i\ sen\ (\alpha)$]:

$$A\ =\ -\ B\ \frac{(k_1^2\ -\ k_2^2)}{4\ k_1\ k_2}\ e^{i\ k_1\ L}\left(\ e^{i\ k_2\ L}\ -\ e^{-\ i\ k_2\ L}\ \right)\ \rightarrow$$

$$A\ =\ -\ i\ B\ \frac{(k_1^2\ -\ k_2^2)}{2\ k_1\ k_2}\ e^{i\ k_1\ L}\ sen\ (k_2\ L)\ , \qquad (8.2.7)$$

$$\mid T\ \mid^2\ =\ B\ B^*\ =\ \frac{1}{1\ -\ \left(\frac{k_1^2\ -\ k_2^2}{2\ k_1\ k_2}\right)^2\ senh^2\ (i\ k_2\ L)}\ \rightarrow$$

$$| T |^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \right)^2 sen^2 (k_2 L)} . \qquad (8.2.8)$$

Usando-se as expressões (8.2.7-8), virá:

$$| R |^2 = A A^* = B B^* \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \right)^2 sen^2 (k_2 L) \rightarrow$$

$$| R |^2 = \frac{\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \right)^2 sen^2 (k_2 L)}{1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \right)^2 sen^2 (k_2 L)} . \qquad (8.2.9)$$

É fácil observar que as expressões (8.2.8-9) indicam que: $| R |^2 + | T |^2 = 1$.

De posse das expressões (8.2.8-9), estudaremos um caso particular delas, qual seja, admitiremos que:[8]

$$L = \frac{\lambda_2}{2} . \qquad (8.2.10)$$

Considerando-se a expressão acima e mais a **hipótese de de Broglie** - “onda piloto”- , ou seja (deveremos lembrar que $k = \frac{p}{\hbar} = \frac{2 \pi p}{h}$):

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{2 \pi}{k_2} , \qquad (8.2.11)$$

teremos:

$$k_2 L = \pi . \qquad (8.2.12)$$

Tomando-se as expressões (8.2.8-9) e substituindo-se nela a expressão acima, virá (lembrar que $sen (\pi) = 0$):

$$| T |^2 = 1, \qquad | R |^2 = 0 . \qquad (8.2.13a\text{-}b)$$

As expressões acima dizem que, quando a largura L do poço de potencial vale o semicomprimento de onda associado à partícula que está atravessando esse poço, não há onda refletida e a transmissão é completa. Portanto, é desse modo que a Mecânica Quântica de Schrödinger explica o famoso **efeito Ramsauer-Townsend**.

8.3. Efeito Ramsauer-Townsend via Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm

No Capítulo 5 vimos que a Mecânica Quântica de Schrödinger e a Mecânica Quântica de de Broglie-Bohm apresentam os mesmos resultados para o tunelamento de uma partícula livre em uma barreira de potencial. No item anterior vimos que essa mesma conclusão ocorre para o caso do espalhamento dessa partícula por um poço de potencial. Neste item, estudaremos esse espalhamento para um poço dissipativo kostiano.

Seja a **equação de Kostin** dada por [vide expressão (5.3.1.1)]:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t} = -\,\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\partial^2\psi(x,\,t)}{\partial x^2} +$$

$$+\,[V(x,\,t) + \frac{\hbar\,\nu}{2\,i}\,\ell n\,\frac{\psi(x,\,t)}{\psi^*(x,\,t)}]\,\psi(x,\,t)\,, \qquad (8.3.1)$$

onde $\psi(x,\,t)$ e $V(x,\,t)$ representam, respectivamente, a função de onda e o potencial dependente do sistema físico em estudo, e ν significa a constante de dissipação.

Considerando-se a função de onda $\psi(x,\,t)$ na forma:[9]

$$\psi(x,\,t) = \Phi(x)\,exp\,[-\,\frac{i\,E}{\hbar\,\nu}\,(1 - e^{-\,\nu\,t})], \qquad (8.3.2)$$

poderemos escrever que:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t} = i\,\hbar\,\Phi(x)\,exp\,[-\,\frac{i\,E}{\hbar\,\nu}\,(1 - e^{-\,\nu\,t})]\,\times$$

$$\times \ \frac{\partial}{\partial t} \ [- \ \frac{i \ E}{\hbar \ \nu} \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t})] \ =$$

$$= \ i \ \hbar \ \Phi(x) \ exp \ [- \ \frac{i \ E}{\hbar \ \nu} \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t})] \ (- \ \frac{i \ E}{\hbar} \ e^{- \ \nu \ t}) \quad \rightarrow$$

$$i \ \hbar \ \frac{\partial \psi(x, \ t)}{\partial t} \ = \ E \ e^{- \ \nu \ t} \ \psi(x, \ t) \ , \qquad (8.3.3a)$$

$$- \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2 \psi(x, \ t)}{\partial x^2} \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \Phi''(x) \ exp \ [- \ \frac{i \ E}{\hbar \ \nu} \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t})] \quad \rightarrow$$

$$- \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\partial^2 \psi(x, \ t)}{\partial x^2} \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} \ \psi(x, \ t) \ , \qquad (8.3.3b)$$

$$\frac{\hbar \ \nu}{2 \ i} \ \ell n \ \frac{\psi(x, \ t)}{\psi^*(x, \ t)} \ =$$

$$= \ \frac{\hbar \ \nu}{2 \ i} \ \Big[\ \ell n \ \frac{\Phi(x)}{\Phi^*(x)} \ + \ \ell n \ \Big(\ \frac{exp \ [- \ \frac{i \ E}{\hbar \ \nu} \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t})]}{exp \ [\frac{i \ E}{\hbar \ \nu} \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t})]} \ \Big) \ \Big] \ =$$

$$= \ \frac{\hbar \ \nu}{2 \ i} \ \Big[\ \ell n \ \frac{\Phi(x)}{\Phi^*(x)} \ + \ \ell n \ \Big(\ exp \ [- \ \frac{2 \ i \ E}{\hbar \ \nu} \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t})] \ \Big) \ \Big] \quad \rightarrow$$

$$\frac{\hbar \ \nu}{2 \ i} \ \ell n \ \frac{\psi(x, \ t)}{\psi^*(x, \ t)} \ = \ \frac{\hbar \ \nu}{2 \ i} \ \ell n \ \frac{\Phi(x)}{\Phi^*(x)} \ -$$

$$- \ E \ (1 \ - \ e^{- \ \nu \ t}) \ . \qquad (8.3.3c)$$

Tomando-se a expressão (8.3.1), inserindo-se nela as expressões (8.3.3a-c) e considerando-se a expressão (8.2.2b), virá:

$$\frac{\hbar^2}{2 \ m} \ \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} + V + E - \frac{\hbar \ \nu}{2 \ i} \ \ell n \ \frac{\Phi(x)}{\Phi^*(x)} + E \ e^{- \ \nu \ t} - E \ e^{- \ \nu \ t} = 0 \rightarrow$$

$$\Phi''(x) \ + \ \Big[\ q^2 \ - \ \frac{m \ \nu}{i \ \hbar} \ \ell n \ \frac{\Phi(x)}{\Phi^*(x)} \ \Big] \ \Phi(x) \ = \ 0 \ , \qquad (8.3.4a)$$

$$q^2 \ = \ \frac{2 \ m}{\hbar^2} \ (E \ + \ V) \ . \qquad (8.3.4b)$$

Agora, consideremos a seguinte **transformação de Madelung-Bohm** [vide expressão (5.2.2.2)]:

$$\Phi(x) \ = \ \phi(x) \ e^{i \ S(x)} \ . \qquad (8.3.5)$$

Derivando-se a expressão acima e substituindo-se na expressão (8.3.4a), teremos:

$$\tfrac{d\Phi(x)}{dx} \equiv \Phi'(x) \ = \ \phi'(x) \ e^{i \ S(x)} \ + \ i \ \phi(x) \ e^{i \ S(x)} \ S'(x)$$

$$\tfrac{d^2\Phi(x)}{dx^2} \equiv \Phi''(x) \ = \ \tfrac{d}{dx} \ \tfrac{d\Phi(x)}{dx} \ =$$

$$= \ \phi''(x) \ e^{i \ S(x)} + i \ \phi'(x) \ e^{i \ S(x)} \ S'(x) + i \ \phi'(x) \ e^{i \ S(x)} \ S'(x) +$$

$$+ \ i^2 \ \phi(x) \ e^{i \ S(x)} \ [S'(x)]^2 \ + \ i \ \phi(x) \ e^{i \ S(x)} \ S''(x) \quad \to$$

$$\Phi'' \ = \ e^{i \ S} \ [\phi'' \ + \ 2 \ i \ \phi' \ S' \ - \ \phi(x) \ (S')^2 \ + \ i \ \phi \ S''] \ ,$$

$$e^{i \ S} \ [\phi'' \ + \ 2 \ i \ \phi' \ S' \ - \ \phi \ (S')^2 \ + \ i \ \phi \ S''(x)] \ +$$

$$+ \left[\ q^2 \ - \ \tfrac{m \ \nu}{i \ \hbar} \ \ell n \left(\ \tfrac{\phi \ e^{i \ S}}{\phi \ e^{- \ i \ S}} \ \right) \ \right] \phi \ e^{i \ S} \ =$$

$$= \ \phi'' \ + \ 2 \ i \ \phi' \ S' \ - \ \phi \ (S')^2 \ + \ i \ \phi \ S'' \ +$$

$$+ \ [q^2 \ - \ \tfrac{m \ \nu}{i \ \hbar} \ \ell n \ \ (e^{i \ 2 \ S})] \ \phi \ = \ 0 \quad \to$$

$$\phi'' \ + \ 2 \ i \ \phi' \ S' \ - \ \phi \ (S')^2 \ + \ i \ \phi \ S'' \ +$$

$$+ \ [q^2 \ - \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S] \ \phi \ = \ 0 \ . \qquad (8.3.6)$$

Separando-se as partes real e imaginária da expressão acima, resultará:

$$\phi'' + (q^2 - \frac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ S)\ \phi = (S')^2\ \phi\ , \qquad (8.3.7a)$$

$$2\ \phi'\ S' + \phi\ S'' = 0\ . \qquad (8.3.7b)$$

Considerando-se que [vide expressão (5.2.2.5)]:

$$\rho(x) = \phi^2(x)\ , \qquad (8.3.8)$$

a integração da expressão (8.3.7b) resultará [lembremos que $\int \frac{du}{u} = \ell n\, u + \ell n\, C$, $\ell n\, u^2 = 2\, \ell n\, u$ e $\ell n\, (\frac{u}{v}) = \ell n\, u - \ell n\, v$]:

$$\frac{(S')'}{S'} = - \frac{2\ \phi'}{\phi} \quad \rightarrow \quad \int \frac{(S')'}{S'} = - \int \frac{2\ \phi'}{\phi}$$

$$\ell n\ S' = - 2\ \ell n\ \phi + \ell n\ C = - \ell n\ \phi^2 + \ell n\ C = \ell n\ \frac{C}{\phi^2} \quad \rightarrow$$

$$S'(x) = \frac{C}{\rho(x)}\ , \qquad S(x) = S(0) + C \int_o^x \frac{dx'}{\rho}\ . \qquad (8.3.9a\text{-}b)$$

Multiplicando-se a expressão (8.3.7a) por ϕ' e usando-se as expressões (8.3.8,9a), resultará [deveremos lembrar que $\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) = \alpha\ \alpha'$]:

$$\phi''\ \phi' + [q^2 - (S')^2]\ \phi\ \phi' = \frac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ S\ \phi\ \phi' \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ [\frac{1}{2}\ (\phi')^2 + \frac{1}{2}\ q^2\ \phi^2 + \frac{1}{2}\ \frac{C^2}{\phi^2}] = \frac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ S\ \phi\ \phi'\ . \qquad (8.3.10)$$

Considerando-se a expressão (8.3.8), poderemos escrever que:

$$\rho' = 2\ \phi\ \phi'\ , \qquad (8.3.11)$$

Inserindo-se a expressão acima na expressão (8.3.10) e usando-se a expressão (8.3.8), resultará:

$$I'(x) \; = \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; S(x) \; \rho'(x) \; , \qquad (8.3.12a)$$

onde:

$$I(x) \; = \; \tfrac{[\rho(x)']^2}{4 \; \rho(x)} \; + \; q^2 \; \rho(x) \; + \; \tfrac{C^2}{\rho(x)} \; . \qquad (8.3.12b)$$

Usando-se a expressão (8.3.9a), teremos:

$$\tfrac{d}{dx} \; (S \; \rho) \; = \; S' \; \rho + S \; \rho' \; = \; S \; \rho' + C \; = \; S \; \rho' + \tfrac{d}{dx} \; (C \; x) \; \rightarrow$$

$$S \; \rho' \; = \; \tfrac{d}{dx} \; (S \; \rho \; - \; C \; x) \; . \qquad (8.3.13)$$

Tomando-se a expressão (8.3.12a), inserindo-se nela a expressão (8.3.13) e usando-se a expressão (8.3.9b,12b), obteremos:

$$\tfrac{dI}{dx} \; = \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; \tfrac{d}{dx} \; (S \; \rho \; - \; C \; x) \; \rightarrow$$

$$\tfrac{d}{dx} \; [I \; - \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; (S \; \rho \; - \; C \; x)] \; = \; 0 \; \rightarrow$$

$$I \; - \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; (S \; \rho \; - \; C \; x) \; = \; constante \; = \; I_o \; \rightarrow$$

$$I(x) \; = \; I_o \; + \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; [S(x) \; \rho(x) \; - \; C \; x] \; , \qquad (8.3.14a)$$

$$I_o \; = \; \tfrac{[\rho'(x)]^2}{4 \; \rho(x)} \; + \; q^2 \; \rho(x) \; + \; \tfrac{C^2}{\rho(x)} \; -$$

$$- \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; \Big[\; \rho(x) \; \Big(\; S(0) \; + \; C \; \textstyle\int_o^x \tfrac{dx'}{\rho(x')} \; \Big) \; - \; C \; x \; \Big] \; . \qquad (8.3.14b)$$

Agora, resolveremos a equação diferencial dada pela expressão (8.3.12b). Para isso, usaremos a técnica da **variação de parâmetros**.[9] Assim, segundo essa técnica, consideremos, inicialmente, $I(x)$ como a constante I. Portanto, teremos:

$$I = \frac{(\rho')^2}{4\ \rho} + q^2\ \rho + \frac{C^2}{\rho} \ \rightarrow\ \frac{(\rho')^2}{4} = I\ \rho - q^2\ \rho^2 - C^2 \ \rightarrow$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{dx} = 2\ \sqrt{I\ \rho - q^2\ \rho^2 - C^2} \ \rightarrow$$

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{I\ \rho - q^2\ \rho^2 - C^2}} = 2 \int dx = 2\ [x - \beta(x)]\ ,$$

onde $\beta(x)$ é o parâmetro a determinar.

Integrando-se o primeiro membro da expressão acima, obteremos [lembrar que $\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -\ arccos\ y$ e que $cos\ y = cos\ (-\ y)$]:

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{I\ \rho - q^2\ \rho^2 - C^2}} = \int \frac{d\rho}{\sqrt{q^2 \left(\frac{I\ \rho}{q^2} - \rho^2 - \frac{C^2}{q^2} + \frac{I^2}{4\ q^4} - \frac{I^2}{4\ q^4} \right)}} =$$

$$= \frac{1}{q} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{I^2}{4\ q^4} - \frac{C^2}{q^2} \right) - \left(\rho - \frac{I}{2\ q^2} \right)^2}} = \frac{1}{q} \int \frac{d\rho}{\sqrt{A - z^2}} =$$

$$= \frac{1}{q} \int \frac{d\left(\frac{z}{\sqrt{A}} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{\sqrt{A}} \right)^2}} = -\ \frac{1}{q}\ arcos\ \left(\frac{z}{\sqrt{A}} \right) \ \rightarrow$$

$$-\ \frac{1}{q}\ arcos \left(\frac{\rho - \frac{I}{2\ q^2}}{\sqrt{\frac{I^2}{4\ q^4} - \frac{C^2}{q^2}}} \right) = 2\ [x - \beta(x)] \ \rightarrow$$

$$arcos \left(\frac{\rho - \frac{I}{2\ q^2}}{\sqrt{\frac{I^2}{4\ q^4} - \frac{C^2}{q^2}}} \right) = (\ -\ 2\ q\ [x - \beta(x)]\ ) \ \rightarrow$$

$$\rho - \frac{I}{2\ q^2} = \sqrt{\frac{I^2}{4\ q^4} - \frac{C^2}{q^2}}\ cos\ (\ 2\ q\ [x - \beta(x)]\ )\ .$$

Para determinarmos o parâmetro $\beta(x)$, reassumiremos que $I(x)$. Desse modo, teremos:

$$\rho(x) \ = \ \frac{1}{2\ q^2} \ \Big[\ I(x) \ + \ \sqrt{I^2(x) \ - \ 4\ q^2\ C^2} \ \times$$

$$\times \ cos \ \Big(\ 2\ q\ [x \ - \ \beta(x)] \ \Big) \ \Big] \ . \qquad (8.3.15)$$

A seguir, determinaremos o parâmetro $\beta(x)$. Assim, derivando-se a expressão (8.3.15), teremos [lembrar a seguinte fórmula: que $\frac{d}{dx}\ cos\ f(x) \ = \ -\ sen\ f(x)\ \frac{d}{dx}\ f(x)$]:

$$\rho'(x) \ = \ \frac{1}{2\ q^2} \ \Bigg(\ I'(x) \ + \ \frac{I(x)\ I'(x)\ cos \ \Big(\ 2\ q\ [x \ - \ \beta(x)] \ \Big)}{\sqrt{I^2(x) \ - \ 4\ q^2\ C^2}} \ -$$

$$- \ \sqrt{I^2(x) \ - \ 4\ q^2\ C^2} \ sen \ \Big(\ 2\ q\ [x \ - \ \beta(x)] \ \Big) \ \times$$

$$\times \ 2\ q\ [1 \ - \ \beta'(x)] \ \Bigg) \ . \qquad (8.3.16)$$

Impondo-se a condição:

$$I'(x) \ + \ \frac{I(x)\ I'(x)\ cos\ [2\ \theta(x)]}{\sqrt{I^2(x) \ - \ 4\ q^2\ C^2}} \ + \ \sqrt{I^2(x) \ - \ 4\ q^2\ C^2} \ \times$$

$$\times \ 2\ q\ \beta'(x)\ sen\ [2\ \theta(x)] \ = \ 0 \ , \qquad (8.3.17a)$$

onde:

$$\theta(x) \ = \ q\ [x \ - \ \beta(x)] \ , \qquad (8.3.17b)$$

a expressão (8.3.16) tomará a seguinte forma:

$$\rho'(x) \ = \ - \ \frac{\sqrt{I^2(x) \ - \ 4\ q^2\ C^2}}{q} \ sen\ [2\ \theta(x)] \ . \qquad (8.3.18)$$

Partindo-se das expressões (8.3.12a,18), poderemos escrever que:

$$\beta'(x) \ = \ \frac{I'(x)}{2\ q^2} \ \left(1 \ + \ \frac{I(x)\ cos\ [2\ \theta(x)]}{\sqrt{I^2(x)\ -\ 4\ q^2\ C^2}} \right) \times$$

$$\times \left(- \ \frac{q}{\sqrt{I^2(x)\ -\ 4\ q^2\ C^2}\ sen\ [2\ \theta(x)]} \right) \ =$$

$$= \ \frac{1}{2\ q^2} \ \frac{2\ m\ \nu}{\hbar} \ S(x)\ \rho'(x) \ \left(1 \ + \ \frac{I(x)\ cos\ [2\ \theta(x)]}{\sqrt{I^2(x)\ -\ 4\ q^2\ C^2}} \right) \frac{1}{\rho'(x)} \quad \rightarrow$$

$$\beta'(x) \ = \ \frac{m\ \nu\ S(x)}{\hbar\ q^2} \ \left(1 \ + \ \frac{I(x)\ cos\ [2\ \theta(x)]}{\sqrt{I^2(x)\ -\ 4\ q^2\ C^2}} \right) . \qquad (8.3.19)$$

É oportuno registrar que a expressão (8.3.12b) é demonstrada usando-se as expressões (8.3.15,19).

Agora, estudaremos o espalhamento de um fluxo estacionário de partículas com energia E e $k^2 \ = \ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2}$ [vide expressão (8.2.5a)] por um poço de potencial definido pelas expressões (8.2.2a-b).

Os fluxos de partículas, incidente ($x \ < \ 0$) e transmitido ($x \ > \ L$), serão dados por [vide expressões (8.2.4a,c) e (8.3.5)]:

$$\psi_I(x) \ = \ e^{i\ k\ x} \ + \ A\ e^{-\ i\ k\ x} \ = \ \phi(x)\ e^{i\ S(x)} \ , \qquad (8.3.20a)$$

$$\psi_T(x) \ = \ B\ e^{i\ k\ x} \ = \ \phi(x)\ e^{i\ S(x)} \ . \qquad (8.3.20b)$$

Fazendo-se uso das condições de continuidade da função de onda (ψ) e de suas derivadas espaciais ($\frac{\partial \psi}{\partial x}$) nos limites do poço de potencial indicados nas expressões (8.2.2a-b), virá:

a) Para x = 0

Usando-se a expressão (8.3.20a), teremos:

$$1 \ + \ A \ = \ \phi(0)\ e^{i\ S(0)} \ , \qquad (8.3.21a)$$

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial x}|_{x\,=\,0} \quad \to$$

$$i\ k\ (1\ -\ A)\ =\ \phi'(0)\ e^{i\ S(0)}\ +\ i\ \phi(0)\ e^{i\ S(0)}\ S'(0) \quad \to$$

$$1\ -\ A\ =\ \frac{e^{i\ S(0)}}{k}\ [-\ i\ \phi'(0)\ +\ \phi(0)\ S'(0)]\ . \qquad (8.3.21b)$$

Somando-se as expressões (8.3.21a-b), virá (lembrar a **fórmula de Euler**):

$$2\ =\ \frac{e^{i\ S(0)}}{k}\ [k\ \phi(0)\ -\ i\ \phi'(0)\ +\ \phi(0)\ S'(0)] \quad \to$$

$$2\ k = [cos\ S(0) + i\ sen\ S(0)]\Big(\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)] - i\ \phi'(0)\ \Big)\ .$$

Separando-se as partes real e imaginária da expressão acima, obteremos:

$$2\ k\ =\ cos\ S(0)\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ +$$

$$+\ \phi'(0)\ sen\ S(0)\ , \qquad (8.3.22a)$$

$$0\ =\ sen\ S(0)\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ -$$

$$-\ \phi'(0)\ cos\ S(0)\ , \qquad (8.3.22b)$$

Multiplicando-se a expressão (8.3.22a) por $sen\ S(0)$ e a expressão (8.3.22b) por $cos\ S(0)$ e subtraindo-se os resultados, virá (lembrar que $sen^2\ \alpha\ +\ cos^2\ \alpha\ =\ 1$):

$$2\ k\ sen\ S(0)\ =\ cos\ S(0)\ sen\ S(0)\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ +$$

$$+\ \phi'(0)\ sen^2\ S(0)\ -\ sen\ S(0)\ cos\ S(0)\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ +$$

$$+\ \phi'(0)\ cos^2\ S(0) \quad \to \quad 2\ k\ sen\ S(0)\ =\ \phi'(0)\ . \qquad (8.3.23a)$$

Multiplicando-se a expressão (8.3.22a) por $cos\ S(0)$ e a expressão (8.3.22b) por $sen\ S(0)$ e somando-se os resultados, virá (usando-se a expressão trigonométrica referida acima):

$$2\ k\ cos\ S(0)\ =\ cos^2\ S(0)\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ +$$

$$+\ \phi'(0)\ sen\ S(0)\ cos\ S(0)\ +\ sen^2\ S(0)\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ -$$

$$-\ \phi'(0)\ cos\ S(0)\ sen\ S(0)\ \ \rightarrow$$

$$2\ k\ cos\ S(0)\ =\ \phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ . \qquad (8.3.23b)$$

Quadrando-se as expressões (8.3.23a-b) e somando-se os resultados, teremos:

$$4\ k^2\ =\ [\phi'(0)]^2\ +\ \phi^2(0)\ [k\ +\ S'(0)]^2\ . \qquad (8.3.23c)$$

b) <u>Para x = L</u>

Usando-se a expressão (8.3.20b), virá:

$$B\ e^{i\ k\ L}\ =\ \phi(L)\ e^{i\ S(L)}\ , \qquad (8.3.24a)$$

$$\frac{\partial\psi_T}{\partial x}|_{x\ =\ L}\ \ \rightarrow$$

$$i\ k\ B\ e^{i\ k\ L}\ =\ \phi'(L)\ e^{i\ S(L)}\ +\ i\ S'(L)\ \phi(L)\ e^{i\ S(L)}\ \ \rightarrow$$

$$B\ e^{i\ k\ L}\ =\ \frac{1}{k}\ e^{i\ S(L)}\ \times$$

$$\times\ [-\ i\ \phi'(L)\ +\ S'(L)\ \phi(L)]\ . \qquad (8.3.24b)$$

Comparando-se as expressões (8.3.24a-b), separando-se as partes real e imaginária e usando-se, também, as expressões (8.3.9a,11), resultará:

$$\phi(L)\ e^{i\ S(L)}\ =\ \tfrac{1}{k}\ e^{i\ S(L)}\ [-\ i\ \phi'(L)\ +\ S'(L)\ \phi(L)]\ \ \rightarrow$$

$$\phi(L)\ =\ \tfrac{1}{k}\ [-\ i\ \phi'(L)\ +\ S'(L)\ \phi(L)]\ \ \rightarrow$$

$$\phi(L)\ =\ \tfrac{1}{k}\ S'(L)\ \phi(L)\ \ \rightarrow$$

$$S'(L)\ =\ k\ ,\qquad \rho(L)\ =\ \tfrac{C}{k}\ ,\qquad (8.3.25\text{a-b})$$

$$\phi'(L)\ =\ 0\ ,\qquad \rho'(L)\ =\ 0\ .\qquad (8.3.26\text{a-b})$$

Subtraindo-se as expressões (8.3.21a-b), usando-se a **fórmula de Euler** e as expressões (8.3.8,9a,11,23a-b), obteremos:

$$2\ A\ =\ e^{i\ S(0)}\ \Big(\ \phi(0)\ [1\ -\ \tfrac{S'(0)}{k}]\ +\ \tfrac{i}{k}\ \phi'(0)\ \Big)\ \ \rightarrow$$

$$A\ [2\ k\ cos\ S(0)\ -\ i\ 2\ k\ sen\ S(0)]\ =$$

$$=\ \phi(0)\ [k\ -\ S'(0)]\ +\ i\ \phi'(0)\ \ \rightarrow$$

$$A\ =\ \tfrac{i\ \phi(0)\ [k\ -\ S'(0)]\ -\ \phi'(0)}{i\ \phi(0)\ [k+\ S'(0)]\ +\ \phi'(0)}\ =$$

$$=\ \tfrac{2\ i\ \phi^2(0)\ [k\ -\ S'(0)]\ -\ 2\ \phi(0)\ \phi'(0)}{i\ 2\ \phi^2(0)\ [k\ +\ S'(0)]\ +\ 2\ \phi(0)\ \phi'(0)}\ =$$

$$=\ \tfrac{2\ i\ [k\ \rho\ -\ \rho\ S'(0)]\ -\ \rho'(0)}{i\ 2\ [k\ \rho\ +\ \rho\ S'(0)]\ +\ \rho'(0)}\ \ \rightarrow$$

$$A\ =\ \tfrac{2\ i\ [k\ \rho(0)\ -\ C]\ -\ \rho'(0)}{2\ i\ [k\ \rho(0)\ +\ C]\ +\ \rho'(0)}\ .\qquad (8.3.27)$$

De posse da expressão acima, calculemos os coeficientes de reflexão ($|\ R\ |^2$) e de transmissão ($|\ T\ |^2$):

$$\mid R \mid^2 \ = \ A \ A^* \ = \ \frac{2 \ i \ [k \ \rho(0) \ - \ C] \ - \ \rho'(0)}{2 \ i \ [k \ \rho(0) \ + \ C] \ + \ \rho'(0)} \ \times$$

$$\times \left(\frac{- \ 2 \ i \ [k \ \rho(0) \ - \ C] \ - \ \rho'(0)}{- \ 2 \ i \ [k \ \rho(0) \ + \ C] \ + \ \rho'(0)} \right) \quad \rightarrow$$

$$\mid R \mid^2 \ = \ \frac{4 \ [k \ \rho(0) \ - \ C]^2 \ + \ [\rho'(0)]^2}{4 \ [k \ \rho(0) \ + \ C]^2 \ + \ [\rho'(0)]^2} \ , \qquad (8.3.28a)$$

$$\mid T \mid^2 \ = \ 1 \ - \ \mid R \mid^2 \ =$$

$$= \ \frac{4 \ [k \ \rho(0) \ + \ C]^2 \ + \ [\rho'(0)]^2 \ - \ 4 \ [k \ \rho(0) \ - \ C]^2 \ - \ [\rho'(0)]^2}{4 \ [k \ \rho(0) \ + \ C]^2 \ + \ [\rho'(0)]^2} \ =$$

$$= \ \frac{4 \ k^2 \ \rho^2(0) \ + \ 8 \ k \ \rho(0) \ C \ + \ 4 \ C^2 \ - \ 4 \ k^2 \ \rho^2(0) \ + \ 8 \ k \ \rho(0) \ C \ - \ 4 \ C^2}{4 \ k^2 \ \rho^2(0) \ + \ 8 \ k \ \rho(0) \ C \ + \ 4 \ C^2 \ + \ [\rho'(0)]^2} \ =$$

$$= \ \frac{16 \ k \ \rho(0) \ C}{[\rho'(0)]^2 \ + \ 4 \ k^2 \ \rho^2(0) \ + \ 4 \ C^2 \ + \ 8 \ k \ \rho(0) \ C} \ =$$

$$\mid T \mid^2 \ = \ \frac{4 \ k \ C}{\frac{[\rho'(0)]^2}{4 \ \rho(0)} \ + \ \frac{C^2}{\rho(0)} \ + \ k^2 \ \rho(0) \ + \ 2 \ k \ C} \ . \qquad (8.3.28b)$$

Calculando-se a expressão (8.3.14b) para $x \ = \ 0$, teremos:

$$I_o \ = \ \frac{[\rho'(0)]^2}{4 \ \rho(0)} \ + q^2 \ \rho(0) \ + \ \frac{C^2}{\rho(0)} \ -$$

$$- \ \frac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ \rho(0) \ S(0) \ . \qquad (8.3.29)$$

Tomando-se a expressão (8.3.28b) e substituindo-se nela a expressão (8.3.29), resultará:

$$\mid T \mid^2 \ = \ \frac{4 \ k \ C}{I_o \ + \ [k^2 \ - \ q^2 \ + \ \frac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S(0)] \ \rho(0) \ + \ 2 \ k \ C} \ . \qquad (8.3.30)$$

A expressão acima pode ser escrita de uma outra maneira. Com efeito, partindo-se da expressão (8.3.24a) e usando-se as expressões (8.3.8,25b), poderemos escrever que:

$$B \; = \; \phi(L) \, e^{i \, [S(L) \; - \; k \; L]} \; , \qquad B^* \; = \; \phi(L) \, e^{- \; i \; [S(L) \; - \; k \; L]} \quad \rightarrow$$

$$| \; T \; |^2 \; = \; B \; B^* \; = \; \phi^2(L) \; = \; \rho(L) \; = \; \tfrac{C}{k} \; . \qquad (8.3.31)$$

Registre-se que a expressão (8.3.31) pode ser demonstrada partindo-se da expressão (8.3.30) e usando-se as expressões (8.3.8,9a,11,12b,23c).

Agora, obteremos a expressão final para $| \; T \; |^2$ sem a constante C. Antes, encontremos algumas expressões úteis. Portanto, usando-se as expressões (8.3.12b,25b,26b), teremos:

$$I(L) \; = \; \tfrac{[\rho'(L)]^2}{4 \; \rho(L)} \; + \; q^2 \; \rho(L) \; + \; \tfrac{C^2}{\rho(L)} \; = \; q^2 \; \tfrac{C}{k} \; + \; C \; k \quad \rightarrow$$

$$I(L) \; = \; k \; C \; (1 \; + \; n^2) \; , \qquad n \; = \; \tfrac{q}{k} \; . \qquad (8.3.32\text{a-b})$$

Partindo-se das expressões (8.3.14a,25b,32a), virá:

$$I(L) \; = \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; [S(L) \; \rho(L) \; - \; C \; L] \; + \; I_o \quad \rightarrow$$

$$k \; C \; (1 \; + \; n^2) \; = \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; [\tfrac{S(L)}{k} \; - \; L] \; C \; + \; I_o \quad \rightarrow$$

$$I_o \; = \; C \; \Big(\; k \; (1 \; + \; n^2) \; +$$

$$+ \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar \; k} \; [k \; L \; - \; S(L)] \; \Big) \; . \qquad (8.3.33)$$

Tomando-se a expressão (8.3.14a), teremos:

$$I(0) \; = \; I_o \; + \; \tfrac{2 \; m \; \nu}{\hbar} \; S(0) \; \rho(0) \; . \qquad (8.3.34\text{a})$$

De outro lado, partindo-se da expressão (8.3.23c) e usando-se as expressões (8.3.8,9a,11,29,32b,34a), virá:

$$4\ k^2\ =\ [\phi'(0)]^2\ +\ \phi^2(0)\ [k\ +\ S'(0)]^2\ =$$

$$=\ [\phi'(0)]^2\ +\ \phi^2(0)\ [k\ +\ \tfrac{C}{\rho(0)}]^2\ =$$

$$=\ \tfrac{[\rho'(0)]^2}{4\ \rho(0)}\ +\ \rho(0)\ [k^2\ +\ \tfrac{2\ k\ C}{\rho(0)}\ +\ \tfrac{C^2}{\rho^2(0)}]\ \ \rightarrow$$

$$4\,k^2\ =\ I_o - q^2\,\rho(0) + \tfrac{2\ m\ \nu}{\hbar}\,\rho(0)\,S(0) + \rho(0)\,k^2 + 2\,k\,C\ =$$

$$=\ I(0)\ -\ q^2\ \rho(0)\ +\ \rho(0)\ k^2\ +\ 2\ k\ C\ \ \rightarrow$$

$$I(0)\ =\ 4\ k^2\ -\ 2\ k\ C\ -\ k^2\ (1\ -\ n^2)\ \rho(0)\ . \qquad (8.3.34b)$$

As expressões (8.3.8,9a,11,17b,18,23a-b,26b) também nos indicam que:

$$tg\ S(0)\ =\ \frac{\phi'(0)}{\phi(0)\ [k\ +\ S'(0)]}\ =\ \frac{\rho'(0)}{2\ \phi^2(0)\ [k\ +\ \frac{C}{\rho(0)}]}\ \ \rightarrow$$

$$S(0)\ =\ arctg\ \Big(\ \frac{\rho'(0)}{2\ [k\ \rho(0)\ +\ C]}\ \Big)\ , \qquad (8.3.35)$$

$$\rho'(L)\ =\ -\ \frac{\sqrt{I^2(L)\ -\ 4\ q^2\ C^2}}{q}\ sen\ [2\ \theta(L)]\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$sen\ \Big(\ 2\ q\ [L\ -\ \beta(L)]\ \Big)\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$2\ q\ [L\ -\ \beta(L)]\ =\ 0\ \ \rightarrow\ \ \beta(L)\ =\ L. \qquad (8.3.36)$$

Considerando-se as expressões (8.3.33,34a-b), teremos:

$$C\ \Big(\ k(1\ +\ n^2)\ +\ \tfrac{2\ m\ \nu}{\hbar\ k}\ [k\ L\ -\ S(L)]\ \Big)\ =$$

$$=\ I(0)\ -\ \tfrac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ S(0)\ \rho(0)\ \ \rightarrow$$

$$I(0) \ = \ C \left(\ k(1 \ + \ n^2) \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ \right) +$$

$$+ \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S(0) \ \rho(0) \ , \qquad (8.3.37a)$$

$$C \left(\ k(1 \ + \ n^2) \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ \right) \ =$$

$$= \ 4 \ k^2 \ - \ 2 \ C \ k \ - \ k^2 \ (1 \ - \ n^2) \ \rho(0) \ - \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S(0) \ \rho(0) \quad \rightarrow$$

$$C \left(\ k(3 \ + \ n^2) \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ \right) \ = \ 4 \ k^2 \ -$$

$$- \ \rho(0) \ [k^2 \ (1 \ - \ n^2) \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S(0)] \ . \qquad (8.3.37b)$$

Tomando-se a expressão (8.3.15) e substituindo-se nela a expressão (8.3.37a), resultará [lembrar que $cos(- \ \alpha) \ = \ cos \ \alpha$]:

$$2 \ q^2 \ \rho(0) \ = \ I(0) \ + \ \sqrt{I^2(0) \ - \ 4 \ q^2 \ C^2} \ cos \ [2 \ q \ \beta(0)] \ =$$

$$= \ C \left(\ k(1 + n^2) + \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k} \ [k \ L - S(L)] \ \right) + \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S(0) \ \rho(0) \ +$$

$$+ \ \sqrt{D_\nu} \ cos \ [2 \ q \ \beta(0)] \ , \qquad (8.3.38a)$$

onde [mantendo-se apenas os termos de primeira ordem de ν e usando-se a expressão (8.3.32b)]:

$$D_\nu \ = \ \Big[\ C \left(\ k(1 \ + \ n^2) \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ \right) +$$

$$+ \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar} \ S(0) \ \rho(0) \ \Big]^2 \ - \ 4 \ q^2 \ C^2 \quad \rightarrow$$

$$D_\nu \ = \ \left(C^2 \ k^2 \ (1 + n^2)^2 + \tfrac{4 \ m \ \nu \ C^2 \ (1 \ + \ n^2)}{\hbar} \ [k \ L - S(L)] \right) +$$

$$+ \frac{4\ m\ \nu}{\hbar}\ C\ k\ (1\ +\ n^2)\ \rho(0)\ S(0)\ -$$

$$-\ 4\ k^2\ n^2\ C^2\ . \qquad (8.3.38b)$$

Considerando-se a expressão acima, vê-se que existe um termo contendo o fator $\rho(0)\ \nu$. Contudo, como estamos considerando apenas os termos em primeira ordem de ν, usaremos para $\rho(0)$ uma expressão que não envolva ν como fator, a qual denominaremos de ρ_ν. Desse modo, considerando-se a expressão (8.3.15), poderemos escrever que [lembrar que $cos\ (-\ \alpha)\ =\ cos\ \alpha$]:

$$\rho_\nu(0)\ =\ \frac{1}{2\ q^2}\ \Bigg(\ \sqrt{I^2(0)\ -\ 4\ q^2\ C^2}\ cos\ [2\ q\ \beta(0)]\ +\ I(0)\ \Bigg)\ .$$

Agora, tomando-se a expressão (8.3.37a) sem termos contendo ν, ou seja:

$$I(0) \sim C\ k\ (1\ +\ n^2)\ ,$$

e inserindo-se na expressão anterior e usando-se a expressão (8.3.32b), virá [lembrar que $cos\ (2\ \alpha)\ =\ 2\ cos^2\alpha\ -\ 1$]:

$$\rho_\nu(0)\ =\ \frac{1}{2\ q^2}\ \Bigg(\ \sqrt{k^2\ C^2\ (1\ +\ n^2)^2\ -\ 4\ n^2\ k^2\ C^2}\ \times$$

$$\times\ cos\ [2\ q\ \beta(0)]\ +\ C\ k\ (1\ +\ n^2)\ \Bigg)\ =$$

$$=\ \frac{1}{2\ n^2\ k^2}\ \Bigg(\ k\ C\ \sqrt{1\ +\ 2\ n^2\ +\ n^4\ -\ 4\ n^2}\ cos\ [2\ q\ \beta(0)]\ +$$

$$+\ C\ k\ (1\ +\ n^2)\ \Bigg)\ =$$

$$= \frac{C\ k}{2\ n^2\ k^2} \left(\sqrt{(n^2\ -\ 1)^2}\ cos\ [2\ q\ \beta(0)]\ +\ 1\ +\ n^2 \right) =$$

$$= \frac{C}{2\ n^2\ k} \left[(n^2\ -\ 1) \left(2\ cos^2\ [q\ \beta(0)]\ -\ 1 \right) +\ 1\ +\ n^2 \right] =$$

$$= \frac{C}{2\ n^2\ k} \left[(n^2 - 1)\ 2\ cos^2\ [q\ \beta(0)] - n^2 + 1 + 1 + n^2 \right] \rightarrow$$

$$\rho_\nu(0)\ =\ \frac{C}{n^2\ k} \left[(n^2\ -\ 1) \times \right.$$

$$\left. \times\ cos^2\ [q\ \beta(0)]\ +\ 1 \right] . \qquad (8.3.39)$$

Tomando-se a expressão (8.3.38b) e substituindo-se nela a expressão acima, virá [lembrar que $\sqrt{1\ +\ x} \sim 1 + x/2$, para $x \ll 1$ e que $q\ >\ k \rightarrow n\ >\ 1$, conforme indicam as expressões (8.2.5a) e (8.3.4b)]:

$$D_\nu\ =\ \left(C^2\ k^2\ (1 + n^2)^2 + \frac{4\ m\ \nu\ C^2\ (1\ +\ n^2)}{\hbar}\ [k\ L - S(L)] \right) +$$

$$+\ \frac{4\ m\ \nu}{\hbar}\ C\ k\ (1\ +\ n^2)\ S(0)\ \frac{C}{n^2\ k} \times$$

$$\times \left[(n^2\ -\ 1)\ cos^2\ [q\ \beta(0)]\ +\ 1 \right] -\ 4\ k^2\ n^2\ C^2\ =$$

$$=\ C^2\ k^2\ (1\ +\ n^4\ +\ 2\ n^2\ -\ 4\ n^2)\ +\ \frac{4\ m\ \nu\ C^2\ (1\ +\ n^2)}{\hbar} \times$$

$$\times \left[k\ L\ -\ S(L)\ +\ \frac{S(0)}{n^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left((n^2\ -\ 1)\ cos^2\ [q\ \beta(0)]\ +\ 1 \right) \right] =$$

$$= C^2 \ k^2 \ (n^2 - \ 1)^2 \left(1 + \ \tfrac{4 \ m \ \nu \ (1 \ + \ n^2)}{\hbar \ k^2 \ (n^2 \ - \ 1)^2} \left[k \ L \ - \ S(L) \ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ \tfrac{S(0)}{n^2} \left(\ (n^2 \ - \ 1) \ cos^2 \ [q \ \beta(0)] \ + \ 1 \ \right) \right] \right) \quad \rightarrow$$

$$\sqrt{D_\nu} \ = \ C \ k \ (n^2 \ - \ 1) \left(1 + \ \tfrac{2 \ m \ \nu \ (1 \ + \ n^2)}{\hbar \ k^2 \ (n^2 \ - \ 1)^2} \left[k \ L \ - \ S(L) \ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ \tfrac{S(0)}{n^2} \left(\ (n^2 \ - \ 1) \ cos^2 \ [q \ \beta(0)] \ + \ 1 \ \right) \right] \right) .$$

Considerando-se a expressão (8.3.38a) e inserindo-se nela a expressão acima, obteremos:

$$\rho(0) \ = \ \frac{C \ k}{2 \ [q^2 \ - \ \frac{m \ \nu \ S(0)}{\hbar}]} \ E \ , \qquad (8.3.40a)$$

onde:

$$E \ = \ (n^2 \ - \ 1) \left(\ 1 \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu \ (1 \ + \ n^2)}{\hbar \ k^2 \ (n^2 \ - \ 1)^2} \left[\ k \ L \ - \ S(l) \ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ \tfrac{S(0)}{n^2} \left(\ 1 \ + \ (n^2 \ - \ 1) \ cos^2 \ [q \ \beta(0)] \ \right) \ \right] \right) cos \ [2 \ q \ \beta(0)] \ +$$

$$+ \ (1 \ + \ n^2) \left(\ 1 + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k^2 \ (1 \ + \ n^2)} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ \right) . \qquad (8.3.40b)$$

Tomando-se a expressão (8.3.37b) e inserindo-se nela a expressão (8.3.40a), resultará:

$$C \ k \left(\ (3 \ + \ n^2) \ + \ \tfrac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k^2} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ + \right.$$

$$+ \frac{E}{2\ [q^2\ -\ \frac{m\ \nu\ S(0)}{\hbar}]}\ [k^2\ (1\ -\ n^2)\ +\ \frac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ S(0)] \Big)\ =\ 4\ k^2\ \ \to$$

$$\frac{C}{k}\ =\ \frac{4}{F}\ , \qquad (8.3.41a)$$

com:

$$F\ =\ 3\ +\ n^2\ +\ \frac{2\ m\ \nu}{\hbar\ k^2}\ [k\ L\ -\ S(L)]\ +$$

$$+\ \frac{[k^2\ (1\ -\ n^2)\ +\ \frac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ S(0)]}{2\ [q^2\ -\ \frac{m\ \nu\ S(0)}{\hbar}]}\ E\ . \qquad (8.3.41b)$$

Por fim, o coeficente de transmissão ($\mid T \mid^2$) do poço de potencial considerado [vide expressões (8.2.2a-b)] será obtido por intermédio das expressões (8.3.31,41a), ou seja:

$$\mid T \mid^2\ =\ \frac{4}{F}\ . \qquad (8.3.42)$$

De posse da expressão acima, estudaremos o **efeito Ramsauer-Townsend** em regiões dissipativas caracterizadas por ν pequeno. Assim, considerando-se que nesse efeito tem-se $L \sim \mathring{A}$, poderemos escrever que [lembrar o **desenvolvimento de Taylor** e a expressão (8.3.36)]:

$$\beta(x)\ =\ \beta(L)\ +\ \beta'(L)\ (x\ -\ L)\ +$$

$$+\ \beta''(L)\ \frac{(x\ -\ L)^2}{2!}\ +\ ...\ , \qquad (8.3.43a)$$

$$\beta(0)\ =\ L\ -\ \beta'(L)\ L\ +$$

$$+\ \beta''(L)\ \frac{L^2}{2!}\ +\ ...\ , \qquad (8.3.43b)$$

$$S(x)\ =\ S(L)\ +\ S'(L)\ (x\ -\ L)\ +$$

$$+ \ S''(L) \ \frac{(x \ - \ L)^2}{2!} \ + \ ... \ , \qquad (8.3.44a)$$

$$S(0) \ = \ S(L) \ - \ S'(L) \ L \ +$$

$$+ \ S''(L) \ \frac{L^2}{2!} \ + \ ... \ . \qquad (8.3.44b)$$

Partindo-se da expressão (8.3.17b) e usando-se a expressão (8.3.43b), teremos [lembrar que $cos \ \alpha \sim 1$, para $\alpha \ll 1$ e que $cos \ (- \ \alpha) \ = \ cos \ \alpha$]:

$$cos \ [q \ \beta(0)] \sim 1 \quad \rightarrow$$

$$\frac{S(0)}{n^2}\Big(1 \ + \ (n^2 - 1) cos^2[q \ \beta(0)]\Big) = \frac{S(0)}{n^2}(1 + n^2 \ - \ 1) = S(0) \ .$$

Tomando-se a expressão (8.3.40b) e substituindo-se nela a expressão acima, virá:

$$E_\nu \ = \ (n^2 \ - \ 1) \ \Big(\ 1 \ + \ \frac{2 \ m \ \nu \ (1 \ + \ n^2)}{\hbar \ k^2 \ (n^2 \ - \ 1)^2} \ [\ k \ L \ - \ S(L) \ +$$

$$+ \ S(0) \ ] \ \Big) \ cos \ [2 \ q \ \beta(0)] \ +$$

$$+ \ (1 \ + \ n^2) \ \Big(\ 1 + \ \frac{2 \ m \ \nu}{\hbar \ k^2 \ (1 \ + \ n^2)} \ [k \ L \ - \ S(L)] \ \Big) \ . \qquad (8.3.45)$$

Usando-se a expressão (8.3.32b) e considerando-se apenas os termos de primeira ordem de ν, teremos [lembrar que $(1 \ + \ x)^m \sim 1 \ + \ m \ x$, para $x \ll 1$]:

$$\frac{k^2 \ (1 \ - \ n^2) \ + \ \frac{2 \ m \ \nu \ S(0)}{\hbar}}{2 \ q^2 \ [1 \ - \ \frac{m \ \nu \ S(0)}{\hbar \ q^2}]} \ =$$

$$= \ \frac{k^2 \ (1 \ - \ n^2)}{2 \ q^2} \ \Big[\ 1 \ + \ \frac{m \ \nu \ S(0)}{\hbar \ q^2} \ \Big] \ \Big[\ 1 \ + \ \frac{2 \ m \ \nu \ S(0)}{\hbar \ k^2 \ (1 \ - \ n^2)} \ \Big] \ =$$

$$= \frac{(1 - n^2)}{2 n^2} \left[1 + \frac{2 m \nu S(0)}{\hbar k^2 (1 - n^2)} + \frac{m \nu S(0)}{\hbar q^2} \right] =$$

$$= \frac{(1 - n^2)}{2 n^2} \left(1 + \frac{2 m \nu S(0)}{\hbar q^2} \left[\frac{n^2}{1 - n^2} + \frac{1}{2} \right] \right) =$$

$$= \frac{(1 - n^2)}{2 n^2} \left[1 + \frac{m \nu S(0)}{\hbar q^2} \frac{n^2 + 1}{1 - n^2} \right] .$$

Partindo-se da expressão (8.3.41b), substituindo-se nela a expressão acima e usando-se a expressão (8.3.45), obteremos:

$$F_\nu = 3 + n^2 + \frac{2 m \nu}{\hbar k^2} [k L - S(L)] +$$

$$+ \frac{(1 - n^2)}{2 n^2} \left[1 + \frac{m \nu S(0)}{\hbar q^2} \left(\frac{n^2 + 1}{1 - n^2} \right) \right] E_\nu . \qquad (8.3.46)$$

Desse modo, a expressão (8.3.42) tomará a seguinte forma:

$$| T |^2 = \frac{4}{F_\nu} . \qquad (8.3.47)$$

As expressões (8.3.45-46) nos mostram que o coeficiente de transmissão em um poço de potencial dissipativo [vide expressão (8.3.47)] depende de $S(0)$ e $S(L)$. Desse modo, vamos determiná-los. Assim, partindo-se da expressão (A4.3.19) e usando-se as expressões (8.3.25a,32a-b), virá (lembrar que $cos\ [2\ \theta(L)] \sim 1$ e que $n > 1$):

$$\beta'(L) = \frac{m \nu S(L)}{\hbar q^2} \left[1 + \frac{k C (1 + n^2)}{\sqrt{[k C (1 + n^2)]^2 - 4 n^2 k^2 C^2}} \right] =$$

$$= \frac{m \nu S(L)}{\hbar q^2} \left[1 + \frac{k C (1 + n^2)}{\sqrt{[k^2 C^2 (1 + 2 n^2 + n^4 - 4 n^2)]}} \right] =$$

$$= \frac{m \nu S(L)}{\hbar q^2} \left[1 + \frac{k C (1 + n^2)}{\sqrt{k^2 C^2 (n^2 - 1)^2)]}} \right] =$$

$$= \frac{m\ \nu\ S(L)}{\hbar\ q^2} \left[1 \ + \ \frac{k\ C\ (1\ +\ n^2)}{k\ C\ (n^2\ -\ 1)} \right] =$$

$$= \frac{m\ \nu\ S(L)}{\hbar\ q^2} \left[\frac{n^2\ -\ 1\ +\ 1\ +\ n^2}{n^2\ -\ 1} \right] =$$

$$= \frac{2\ m\ \nu\ S(L)}{\hbar\ q^2} \left[\frac{1}{1\ -\ \frac{k^2}{q^2}} \right] \ \rightarrow$$

$$\beta'(L) \ = \ \frac{2\ m\ \nu\ S(L)}{\hbar\ (q^2\ -\ k^2)} \ , \qquad (8.3.48a)$$

$$\beta''(L) \ = \ \frac{2\ m\ \nu\ k}{\hbar\ (q^2\ -\ k^2)} \ . \qquad (8.3.48b)$$

Considerando-se a expressão (8.3.43b) e substituindo-se nela as expresões (8.3.48a-b), virá:

$$\beta(0) \sim L \ - \ \frac{2\ m\ \nu}{\hbar}\ \frac{S(L)\ L}{q^2\ -\ k^2} \ + \ \frac{L^2}{2}\ \frac{2\ m\ \nu\ k}{\hbar\ (q^2\ -\ k^2)} \ \rightarrow$$

$$\beta(0) \sim L \left(1 \ + \ \frac{2\ m\ \nu}{\hbar\ (q^2\ -\ k^2)} \left[\frac{k\ L}{2} \ - \ S(L) \right] \right) . \qquad (8.3.49)$$

Usando-se as expressões (8.3.4b,9a,26b), poderemos escrever que (lembrar que $k^2 \ = \ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2}$):

$$q^2 \ - \ k^2 \ = \ \frac{2\ m}{\hbar^2}\ (E \ + \ V) \ - \ \frac{2\ m\ E}{\hbar^2} \ = \ \frac{2\ m\ V}{\hbar^2} \ , \qquad (8.3.50a)$$

$$S''(x) \ = \ - \ \frac{C}{\rho^2(x)}\ \rho'(x) \ \ \rightarrow \ \ S''(L) \ = \ 0 \ . \qquad (8.3.50b)$$

Considerando-se as expressões (8.3.25a,44b,49,50b), virá:

$$S(0) \sim S(L) \ - \ k\ L \ , \qquad (8.3.51a)$$

$$\beta(0) \sim L \left(1 \ - \ \frac{\nu\ \hbar}{V} \left[\frac{k\ L}{2} \ + \ S(0) \right] \right) , \qquad (8.3.51b)$$

$$\beta^2(0) \sim L^2 \left(1 \ - \ \frac{2\ \nu\ \hbar}{V} \left[\ \frac{k\ L}{2} \ + \ S(0) \ \right] \right). \qquad (8.3.51c)$$

Tomando-se as expressões (8.3.45-47), substituindo-se nela a expressão (8.3.51a) e recordando que estamos considerando apenas termos em primeira ordem de ν, resultará [lembrar que $cos\ [2\ q\ \beta(0)] \ = \ 1 \ - \ 2\ sen^2\ [q\ \beta(0)]$ e a expressão (8.3.32b)]:

$$E_\nu[S(0)] \ = \ (n^2 \ - \ 1)\ cos\ [2\ q\ \beta(0)] \ +$$

$$+\ 1 \ + \ n^2 \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2}\ , \qquad (8.3.52a)$$

$$F_\nu[S(0)] \ = \ 3 \ + \ n^2 \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \ +$$

$$+\ \frac{(1\ -\ n^2)}{2\ n^2} \left[\ 1 \ + \ \frac{m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ q^2} \left(\ \frac{n^2\ +\ 1}{1\ -\ n^2} \ \right) \ \right] \times$$

$$\times \left(\ (n^2 \ - \ 1)\ cos\ [2\ q\ \beta(0)] \ + \ 1 \ + \ n^2 \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \ \right) \ =$$

$$= \ 3 \ + \ n^2 \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \ + \left[\ \frac{1\ -\ n^2}{2\ n^2} \ + \ \frac{m\ \nu\ S(0)}{2\ n^2\ \hbar\ q^2}\ (n^2 \ + \ 1) \ \right] \times$$

$$\times \left(\ (n^2 \ - \ 1)\ cos\ [2\ q\ \beta(0)] \ + \ 1 \ + \ n^2 \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \ \right) \ =$$

$$\sim 3 \ + \ n^2 \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \ - \ \frac{(1\ -\ n^2)^2}{2\ n^2}\ cos\ [2\ q\ \beta(0)] \ +$$

$$+\ \frac{1\ -\ n^4}{2\ n^2} \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \left(\ \frac{1\ -\ n^2}{2\ n^2} \ \right) +$$

$$+\ \frac{m\ \nu\ S(0)}{2\ \hbar\ n^4\ k^2}\ (n^4 \ - \ 1)\ cos\ [2\ q\ \beta(0)] \ + \ \frac{m\ \nu\ S(0)}{2\ \hbar\ n^4\ k^2}\ (n^2 \ + \ 1)^2 \ =$$

$$= \ 3 \ + \ \frac{1\ +\ n^4}{2\ n^2} \ - \ \frac{2\ m\ \nu\ S(0)}{\hbar\ k^2} \left(\ 1 \ + \ \frac{1\ -\ n^2}{2\ n^2} \ - \ \frac{n^4\ +\ 2\ n^2\ +\ 1}{4\ n^4} \ \right) +$$

$$+ \, cos \, [2 \; q \; \beta(0)] \left[\, \frac{m \; \nu \; S(0)}{2 \; \hbar \; n^4 \; k^2} \; (n^4 \; - \; 1) \; - \; \frac{1 \; - \; 2 \; n^2 \; + \; n^4}{2 \; n^2} \, \right] \; =$$

$$= \; 3 \; + \; \frac{1 \; + \; n^4}{2 \; n^2} \; - \; \frac{2 \; m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; k^2} \; \left(\, \frac{n^4 \; - \; 1}{4 \; n^4} \, \right) +$$

$$+ \left(\, 1 \; - \; 2 \; sen^2 \; [q \; \beta(0)] \, \right) \times$$

$$\times \left[\, \frac{m \; \nu \; S(0)}{2 \; \hbar \; n^4 \; k^2} \; (n^4 \; - \; 1) \; - \; \frac{1 \; - \; 2 \; n^2 \; + \; n^4}{2 \; n^2} \, \right] \; =$$

$$= \; 3 \; + \; \frac{1 \; + \; n^4}{2 \; n^2} \; - \; \frac{1 \; - \; 2 \; n^2 \; + \; n^4}{2 \; n^2} \; - \; \frac{2 \; m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; k^2} \; \left(\, \frac{n^4 \; - \; 1}{4 \; n^4} \, \right) +$$

$$+ \; \frac{2 \; m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; k^2} \; \left(\, \frac{n^4 \; - \; 1}{4 \; n^4} \, \right) -$$

$$- \; 2 \; sen^2 \; [q \; \beta(0)] \left[\, \frac{m \; \nu \; S(0)}{2 \; \hbar \; n^4 \; k^2} \; (n^4 \; - \; 1) \; - \; \frac{1 \; - \; 2 \; n^2 \; + \; n^4}{2 \; n^2} \, \right] \; =$$

$$= \; 4 \Bigg(\, 1 \; - \; sen^2 \; [q \; \beta(0)] \; \left(\, \frac{1 \; - \; n^2}{2 \; n} \, \right)^2 \times$$

$$\times \left[\, \frac{m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; k^2 \; n^2} \; \frac{(n^2 \; - \; 1) \; (n^2 \; + \; 1)}{(n^2 \; - \; 1)^2} \; - \; 1 \, \right] \Bigg) \quad \rightarrow$$

$$F_\nu[S(0)] \; = \; 4 \Bigg(\, 1 \; + \; sen^2 \; [q \; \beta(0)] \; \left(\, \frac{1 \; - \; n^2}{2 \; n} \, \right)^2 \times$$

$$\times \left[\, 1 \; - \; \frac{m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; q^2} \; \left(\, \frac{n^2 \; + \; 1}{n^2 \; - \; 1} \, \right) \, \right] \Bigg) \, , \qquad (8.3.52b)$$

$$| \; T \; |^{- \; 2} \; = \; 1 \; + \; sen^2 \; [q \; \beta(0)] \; \left(\, \frac{1 \; - \; n^2}{2 \; n} \, \right)^2 \times$$

$$\times \left[\, 1 \; - \; \frac{m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; q^2} \; \left(\, \frac{n^2 \; + \; 1}{n^2 \; - \; 1} \, \right) \, \right] . \qquad (8.3.52c)$$

Observemos que, usando-se as expressões (8.2.6a-b) e (8.3.4b,49) e fazendo-se $\nu = 0$ na expressão (8.3.52c), obtém-se a expressão (8.2.8).

De posse da expressão (8.3.52c), voltemos ao **efeito Ramsauer-Townsend**. Segundo vimos no item anterior, esse efeito é caracterizado por [vide expressão (8.2.12)]:

$$q\ L\ =\ \pi\ . \qquad (8.3.53a)$$

Desse modo, usando-se a expressão (8.3.51b), a expressão acima poderá ser escrita na forma:

$$q\ \beta(0) \sim \pi \quad \rightarrow \quad 2\ q\ \beta(0) \sim 2\ \pi\ . \qquad (8.3.53b\text{-}c)$$

Usando-se as expressões (8.3.17b,18,53b-c), teremos [lembrar que $sen\ (-\ \alpha)\ =\ -\ sen\ \alpha$, $sen\ (2\ \pi)\ =\ 0$ e $sen\ (\pi)\ =\ 0$]:

$$\rho'(0) = -\ \frac{\sqrt{I^2(0)\ -\ 4\ q^2\ C^2}}{q}\ sen\ [-\ 2\ q\ \beta(0)]\ =$$

$$=\ \frac{\sqrt{I^2(0)\ -\ 4\ q^2\ C^2}}{q}\ sen\ (2\ \pi)\ =\ 0 \quad \rightarrow$$

$$\rho'(0)\ =\ 0\ , \qquad sen\ [q\ \beta(0)]\ =\ 0\ . \qquad (A4.3.54a\text{-}b)$$

Considerando-se as expressões (8.3.11,23a,54a), teremos:

$$2\ k\ sen\ S(0)\ =\ \phi'(0)\ =\ \frac{\rho'(0)}{2\ \phi(0)}\ =\ 0 \quad \rightarrow$$

$$S(0)\ =\ 0\ . \qquad (8.3.55)$$

Por fim, as expressões (8.3.52c,54b) nos mostram que:

$$| T |^2 = 1 , \qquad (8.3.56)$$

expressão essa que reproduz a expressão (8.2.13a) e que caracteriza o **efeito Ramsauer-Townsend**.

Na conclusão deste Capítulo, poderemos usar a expressão (8.3.52c) para estudar o tunelamento através de barreiras de potencial com bordas aguçadas ("sharp-edged"). Assim, substituindo-se V por $-V$ na expressão (8.3.4b), resultará:

$$q^2 = \frac{2\, m}{\hbar^2} (E - V) . \qquad (8.3.57)$$

Tomando-se o caso do tunelamento em que $E < V$, o coeficiente de transmissão $|T|^2$ para esse tunelamento será obtido fazendo-se na expressão (8.3.52c) as seguintes substituições [lembrar a expressão (8.3.32b)]:

$$n = i\, \bar{n} , \qquad \bar{n} = \sqrt{\frac{V - E}{E}} , \qquad (8.3.58a\text{-}b)$$

$$q = i\, \bar{q} , \qquad \bar{q} = \frac{\sqrt{2\, m\, (V - E)}}{\hbar} . \qquad (8.3.58c\text{-}d)$$

Desse modo, considerando-se que:

$$sen\, (i\, z) = i\, senh\, (z) , \qquad senh\, (z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} ,$$

e que $\bar{q} \gg 1$, poderemos escrever que:

$$sen\, [q\, \beta(0)] = sen\, [i\, \bar{q}\, \beta(0)] = i \left(\frac{e^{\bar{q}\, \beta(0)} - e^{-\bar{q}\, \beta(0)}}{2} \right) \rightarrow$$

$$sen\, [q\, \beta(0)] \sim \frac{i}{2}\, e^{\bar{q}\, \beta(0)} , \qquad e^{2\, \bar{q}\, \beta(0)} \gg 1. \qquad (8.3.59a\text{-}b)$$

Usando-se as expressões (8.3.52c,58a,c,59a-b) poderemos escrever que:

$$| T |^{-2} \sim \frac{e^2 \; \bar{q} \; \beta(0)}{16 \; \bar{n}^2} \; (1 \; + \; \bar{n}^2)^2 \; \times$$

$$\times \left[1 \; + \; \frac{m \; \nu \; S(0)}{\hbar \; \bar{q}^2} \; \left(\frac{\bar{n}^2 \; - \; 1}{\bar{n}^2 \; + \; 1} \right) \right] . \qquad (8.3.60)$$

Destaquemos que, fazendo-se $\nu \; = \; 0$ na expressão acima e usando-se as expressões (8.3.32b,51b,58a,c), reproduziremos a expressão (5.2.1.16a).

Para o caso do tunelamento em questão [barreiras delgadas ("thin") e $E \; < \; V$], demonstra-se que:[9]

$$S(0) \; = \; - \; tg^{-1} \; (\bar{n}) \; , \qquad (8.3.61)$$

expressão essa que, levada à expressão (8.3.60), nos mostra que, quando $tg^{-1} \; (\bar{n}) \; > \; \frac{k \; L}{2}$, a dissipação, representada por ν, aumenta o tunelamento.

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. RAMSAUER, C. W. 1921. *Annalen der Physik 64*, p. 513.

2. RAMSAUER, C. W. 1921. *Annalen der Physik 66*, p. 545.

3. TOWNSEND, J. S. E. and BAILEY, V. A. 1922. *Philosophical Magazine 43; 44*, p. 593; 1033.

4. RAMSAUER, C. W. und KOLLATH, R. 1929. *Annalen der Physik 3*, p. 536.

5. Em 1968 (*American Journal of Physics 36*, p. 701), Stephen G. Kukolich demonstrou esse efeito para o xenônio (Xe).

6. Para maiores detalhes sobre esse efeito, veja-se: MOTT, N. F. and MASSEY, H. S. W. 1971. **The Theory of Atomic Collisions**, Clarendon Press, Oxford; BRODE, R. B. 1933. *Reviews of Modern Physics 5* (p. 257.

7. O espalhamento de partículas por poços de potenciais é estudado em vários textos. Veja-se, por exemplo:

   . BOHM, D. 1951. **Quantum Theory**. Prentice-Hall, Inc.

   . DAVYDOV, A. S. 1968. **Quantum Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

   . MESSIAH, A. 1961. **Quantum Mechanics I**. North-Holland Publications Company.

   . LEITE LOPES, J. 1992. **A Estrutura Quântica da Matéria**. Editora UFRJ/ERCA Editora e Gráfica.

   . SCHIFF, L. I. 1955. **Quantum Mechanics**. MacGraw-Hill Book Company, Inc.

   . SPROULL, R. L. and PHILLIPS, W. A. 1980. **Modern Physics**. John Wiley and Sons.

8. SPROULL and PHILLIPS, op. cit.

9. NASSAR, A. B. 1998. **Effect of dissipation on scaterring and tunneling through sharp-edged potential barriers**. DFUFPA (mimeo).

APÊNDICE

PROPAGADORES DE FEYNMAN

VIA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A.1. Introdução

Neste Apêndice, calcularemos exatamente o **propagador de Feynman** para um lagrangiano quadrático tridimensional dependente do tempo, resolvendo a **equação de Schrödinger Linear**. Por intermédio de uma rotação e de uma superposição não-linear de coordenadas, mostraremos que tal propagador pode ser obtido do **propagador da partícula livre** em um novo sistema de coordenadas espaço-temporal.

A.2. Cálculo do Propagador

Consideremos o lagrangiano quadrático tridimensional dependente do tempo:[1]

$$L(\dot{\vec{r}},\ \vec{r},\ t) \ = \ \frac{1}{2}\ a(t)\ (\dot{\vec{r}})^2 \ + \ \vec{A}(\vec{r},\ t)\ .\ \dot{\vec{r}} \ +$$

$$+\ c(t)\ (\vec{r})^2 \ + \ \vec{d}(t)\ .\ \vec{r}\ , \qquad \text{(A.2.1)}$$

onde:

$$\vec{r} \ = \ x\ \hat{I} \ + \ y\ \hat{J} \ + \ z\ \hat{K}\ , \qquad \text{(A.2.2)}$$

$$\vec{d}(t) \ = \ d_x\ \hat{I} \ + \ d_y\ \hat{J} \ + \ d_z\ \hat{K}\ , \qquad \text{(A.2.3)}$$

e o **potencial vetor** $\vec{A}(\vec{r},\ t)$ é escolhido de modo que o **vetor indução magnética** $\vec{B}(t)$ seja paralelo ao eixo dos z, ou seja:

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)\ =\ -\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ y\ \hat{I}\ +\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ x\ \hat{J}\ +\ 0\ \hat{K}\ , \qquad \text{(A.2.4)}$$

pois (lembrar que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\ =\ \delta_{ij},\ i,\ j\ =\ x,\ y, z$):

$$\vec{B}(\vec{r},\ t)\ =\ \nabla\ \times\ \vec{A}(\vec{r},\ t)\ =\ \begin{bmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}\ =$$

$$=\ \hat{I}\ [\tfrac{\partial A_z}{\partial y}\ -\ \tfrac{\partial A_y}{\partial z}]\ +\ \hat{J}\ [\tfrac{\partial A_x}{\partial z}\ -\ \tfrac{\partial A_z}{\partial x}]\ +\ \hat{K}\ [\tfrac{\partial A_y}{\partial x}\ -\ \tfrac{\partial A_x}{\partial y}]\ =$$

$$=\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ \hat{I}\ [\tfrac{\partial 0}{\partial y}\ -\ \tfrac{\partial x}{\partial z}]\ +\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ \hat{J}\ [-\ \tfrac{\partial y}{\partial z}\ -\ \tfrac{\partial 0}{\partial x}] +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ \hat{K}\ [\tfrac{\partial x}{\partial x}\ +\ \tfrac{\partial y}{\partial y}]\ \ \to$$

$$\vec{B}(\vec{r},\ t)\ =\ B(t)\ \hat{K}\ . \qquad \text{(A.2.5)}$$

Tomando-se a expressão (A.2.1) e substituindo-se nela as expressões (A.2.2-5), resultará:

$$L(\dot{\vec{r}},\ \vec{r},\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ [\dot{x}^2\ +\ \dot{y}^2\ +\ \dot{z}^2] +$$

$$+\ [-\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ y\ \dot{x}\ +\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ x\ \dot{y}\ +\ 0\ \times\ z] +$$

$$+\ c(t)\ (x^2\ +\ y^2\ +\ z^2)\ +\ d_x\ x\ +\ d_y\ y\ +\ d_z\ z\ \ \to$$

$$L(\dot{\vec{r}},\ \vec{r},\ t)\ =\ L_{\perp}(\dot{\vec{r}}_{\perp},\ \vec{r}_{\perp},\ t)\ +\ L_{\parallel}(\dot{\vec{r}}_{\parallel},\ \vec{r}_{\parallel},\ t), \qquad \text{(A.2.6)}$$

com:

$$L_{\perp}(\dot{\vec{r}}_{\perp},\ \vec{r}_{\perp},\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ (\dot{x}^2\ +\ \dot{y}^2)\ +\ \tfrac{1}{2}\ B(t)\ (x\ \dot{y}\ -\ \dot{x}\ y) +$$

$$+ \ c(t) \ (x^2 \ + \ y^2) \ + \ d_x \ x \ + \ d_y \ y \ , \quad \text{(A.2.7a)}$$

$$L_{\parallel}(\dot{\vec{r}}_{\parallel}, \ \vec{r}_{\parallel}, \ t) \ = \ \tfrac{1}{2} \ a(t) \ \dot{z}^2 \ + \ c(t) \ z^2 \ + \ d_z \ z \ , \quad \text{(A.2.7b)}$$

$$\dot{\vec{r}}_{\perp} \ = \ \dot{x} \ \hat{I} \ + \ \dot{y} \ \hat{J} \ , \qquad \vec{r}_{\perp} \ = \ x \ \hat{I} \ + \ y \ \hat{J} \ , \quad \text{(A.2.8a-b)}$$

$$\dot{\vec{r}}_{\parallel} \ = \ \dot{z} \ \hat{K} \ , \qquad \vec{r}_{\parallel} \ = \ z \ \hat{K} \ , \quad \text{(A.2.8c-d)}$$

$$\vec{d}_{\perp} \ = \ d_x \ \hat{I} \ + \ d_y \ \hat{J} \ , \qquad \vec{d}_{\parallel} \ = \ d_z \ \hat{K} \ . \quad \text{(A.2.8e-f)}$$

Para desacoplar x e y na expressão (A.2.7a), introduziremos uma rotação ($\Re$) em torno do eixo dos z de um ângulo $\alpha(t)$ definido por:[2]

$$\alpha(t) \ = \ \int^t \omega(s) \ ds \quad \rightarrow$$

$$\dot{\alpha}(t) \ = \ \omega(t) \ = \ \tfrac{B(t)}{2 \ a(t)} \ . \quad \text{(A.2.9a-b)}$$

Segundo essa operação rotação $\Re$, podemos escrever que [lembrar que $\vec{R} \ = \ X \ \hat{I} \ + \ Y \ \hat{J} \ + \ Z \ \hat{K}$ e considerar a expressão (A.2.2)]:[3]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} cos \ [\alpha(t)] & sen \ [\alpha(t)] & 0 \\ - \ sen \ [\alpha(t)] & cos \ [\alpha(t)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{r} \ = \ \Re \ \vec{R} \ . \quad \text{(A.2.10a-b)}$$

Efetuando-se o produto matricial indicado na expressão (A.2.10a), teremos [lembrar que $\alpha(t)$]:

$$x \ = \ X \ cos \ \alpha \ + \ Y \ sen \ \alpha \ , \quad \text{(A.2.11a)}$$

$$y \; = \; - \, X \; sen \; \alpha \; + \; Y \; cos \; \alpha \; , \qquad z \; = \; Z \; . \quad \text{(A.2.11b-c)}$$

Quadrando-se as expressões (A.2.11a-b) e somando-se os resultados, virá (lembrar que $sen^2 \; \alpha \; + \; cos^2 \; \alpha \; = \; 1$):

$$x^2 \; + \; y^2 \; = \; X^2 \; cos^2 \; \alpha \; + \; Y^2 \; sen^2 \; \alpha \; +$$

$$+ \; 2 \; X \; Y \; sen \; \alpha \; cos \; \alpha \; + \; X^2 \; sen^2 \; \alpha \; +$$

$$+ \; Y^2 \; cos^2 \; \alpha \; - \; 2 \; X \; Y \; cos \; \alpha \; sen \; \alpha \; =$$

$$= \; X^2 \; (sen^2 \; \alpha \; + \; cos^2 \; \alpha) \; + \; Y^2 \; (sen^2 \; \alpha \; + \; cos^2 \; \alpha) \quad \rightarrow$$

$$x^2 \; + \; y^2 \; = \; X^2 \; + \; Y^2 \; . \qquad \text{(A.2.12)}$$

Derivando-se as expressões (A.2.11a-b) em relação ao tempo t, quadrando-se os resultados e somando-se, resultará:

$$\dot{x} \; = \; \dot{X} \; cos \; \alpha \; - \; X \; sen \; \alpha \; \dot{\alpha} \; + \; \dot{Y} \; sen \; \alpha \; + \; Y \; cos \; \alpha \; \dot{\alpha} \quad \rightarrow$$

$$\dot{x} \; = \; cos \; \alpha \; (\dot{X} \; + \; \dot{\alpha} \; Y) \; + \; sen \; \alpha \; (\dot{Y} \; - \; \dot{\alpha} \; X) \; , \qquad \text{(A.2.13a)}$$

$$\dot{y} \; = \; - \, \dot{X} \; sen \; \alpha \; - \; X \; cos \; \alpha \; \dot{\alpha} \; + \; \dot{Y} \; cos \; \alpha \; - \; Y \; sen \; \alpha \; \dot{\alpha} \quad \rightarrow$$

$$\dot{y} \; = \; - \; sen \; \alpha \; (\dot{X} \; + \; \dot{\alpha} \; Y) \; +$$

$$+ \; cos \; \alpha \; (\dot{Y} \; - \; \dot{\alpha} \; X) \; , \qquad \text{(A.2.13b)}$$

$$\dot{x}^2 \; + \; \dot{y}^2 \; = \; cos^2 \; \alpha \; (\dot{X} \; + \; \dot{\alpha} \; Y)^2 \; + \; sen^2 \; \alpha \; (\dot{Y} \; - \; \dot{\alpha} \; X)^2 \; +$$

$$+ \; 2 \; sen \; \alpha \; cos \; \alpha \; (\dot{X} \; + \; \dot{\alpha} \; Y) \; (\dot{Y} \; - \; \dot{\alpha} \; X) \; +$$

$$+ \; sen^2 \; \alpha \; (\dot{X} \; + \; \dot{\alpha} \; Y)^2 \; + \; cos^2 \; \alpha \; (\dot{Y} \; - \; \dot{\alpha} \; X)^2 \; -$$

$$- 2 \, sen \, \alpha \, cos \, \alpha \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X) \, =$$

$$= \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y)^2 \, (cos^2 \, \alpha \, + \, sen^2 \, \alpha) \, +$$

$$+ \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X)^2 \, (cos^2 \, \alpha \, + \, sen^2 \, \alpha) \quad \rightarrow$$

$$\dot{x}^2 \, + \, \dot{y}^2 \, = \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y)^2 \, + \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X)^2 \quad \rightarrow$$

$$\dot{x}^2 \, + \, \dot{y}^2 \, = \, [\dot{X}^2 \, + \, \dot{Y}^2 \, + \, \dot{\alpha}^2 \, (X^2 \, + \, Y^2) \, +$$

$$+ \, 2 \, \dot{\alpha} \, (\dot{X} \, Y \, - \, X \, \dot{Y})] \, . \qquad \text{(A.2.13c)}$$

Usando-se as expressões (A.2.11a-b,13a-b), teremos:

$$x \, \dot{y} \, - \, \dot{x} \, y \, = \, (X \, cos \, \alpha \, + \, Y \, sen \, \alpha) \, [- \, sen \, \alpha \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, +$$

$$+ \, cos \, \alpha \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X)] \, - \, [cos \, \alpha \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, +$$

$$+ \, sen \, \alpha \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X)] \, (- \, X \, sen \, \alpha \, + \, Y \, cos \, \alpha) \, =$$

$$= \, - \, sen \, \alpha \, cos \, \alpha \, X \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, - \, sen^2 \, \alpha \, Y \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, +$$

$$+ \, cos^2 \, \alpha \, X \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X) \, + \, sen \, \alpha \, cos \, \alpha \, Y \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X) \, +$$

$$+ \, sen \, \alpha \, cos \, \alpha \, X \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, - \, cos^2 \, \alpha \, Y \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, +$$

$$+ \, sen^2 \, \alpha \, X \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X) \, - \, sen \, \alpha \, cos \, \alpha \, Y \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X) \, =$$

$$= \, -Y \, (\dot{X} \, + \, \dot{\alpha} \, Y) \, (sen^2 \, \alpha \, + \, cos^2 \, \alpha) \, +$$

$$+ \, X \, (\dot{Y} \, - \, \dot{\alpha} \, X) \, (sen^2 \, \alpha \, + \, cos^2 \, \alpha) \quad \rightarrow$$

$$x\,\dot{y} \;-\; \dot{x}\,y \;=\; X\,\dot{Y} \;-\; \dot{X}\,Y \;-\; \dot{\alpha}\,(X^2 \;+\; Y^2)\,. \qquad \text{(A.2.14)}$$

Considerando-se a expressão (A.2.7a) e inserindo-se nela as expressões (A.2.9a-b,11a-b,12,13c,14), obteremos:

$$L_{\perp}(\dot{\vec{r}}_{\perp},\; \vec{r}_{\perp},\; t) \;=\; \tfrac{1}{2}\, a(t)\, [\dot{X}^2 \;+\; \dot{Y}^2 \;+$$

$$+\; \dot{\alpha}^2\, (X^2 \;+\; Y^2) \;+\; 2\, \dot{\alpha}\, (\dot{X}\, Y \;-\; X\, \dot{Y})] \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{2}\, B(t)\, [X\, \dot{Y} \;-\; \dot{X}\, Y \;-\; \dot{\alpha}\, (X^2 \;+\; Y^2)] \;+$$

$$+\; c(t)(X^2 \;+\; Y^2) \;+\; d_x(t)\, (X\, cos\, \alpha \;+\; Y\, sen\, \alpha) \;+$$

$$+\; d_y(t)\, (-\, X\, sen\, \alpha \;+\; Y\, cos\, \alpha) \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\, a(t)\, (\dot{X}^2 \;+\; \dot{Y}^2) \;+\; \tfrac{1}{2}\, a(t)\, \tfrac{B^2(t)}{4\, a^2(t)}\, (X^2 \;+\; Y^2) \;+$$

$$+\; \tfrac{1}{2}\, a(t)\, \tfrac{2\, B(t)}{2\, a(t)}\, (\dot{X}\, Y \;-\; X\, \dot{Y}) \;+\; \tfrac{1}{2}\, B(t)\, [(X\, \dot{Y} \;-\; \dot{X}\, Y) \;-$$

$$-\; \tfrac{B(t)}{2\, a(t)}\, (X^2 \;+\; Y^2)] \;+\; c(t)(X^2 \;+\; Y^2) \;+$$

$$+\; d_x(t)\, (X\, cos\, \alpha \;+\; Y\, sen\, \alpha) \;+$$

$$+\; d_y(t)\, (-\, X\, sen\, \alpha \;+\; Y\, cos\, \alpha) \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\, a(t)\, (\dot{X}^2 \;+\; \dot{Y}^2) \;+\; \tfrac{B^2(t)}{a(t)}\, (X^2 \;+\; Y^2)(\tfrac{1}{8} \;-\; \tfrac{1}{4}) \;+$$

$$+\; c(t)(X^2 \;+\; Y^2) \;+\; d_x(t)\, (X\, cos\, \alpha \;+\; Y\, sen\, \alpha) \;+$$

$$+\; d_y(t)\, (-\, X\, sen\, \alpha \;+\; Y\, cos\, \alpha) \quad \rightarrow$$

$$L_{\perp}(\dot{\vec{r}}_{\perp},\ \vec{r}_{\perp},\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ (\dot{X}^2\ +\ \dot{Y}^2)\ -\ \tfrac{B^2(t)}{8\ a(t)}\ (X^2\ +\ Y^2)\ +$$

$$+\ c(t)(X^2\ +\ Y^2)\ +\ d_x(t)\ (X\ cos\ \alpha\ +\ Y\ sen\ \alpha)\ +$$

$$+\ d_y(t)\ (-\ X\ sen\ \alpha\ +\ Y\ cos\ \alpha)\ . \qquad \text{(A.2.15)}$$

Substituindo-se a expressão (A.2.11c) na expressão (A.2.7b), resultará:

$$L_{\parallel}(\dot{\vec{r}}_{\parallel},\ \vec{r}_{\parallel},\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \dot{Z}^2\ +\ c(t)\ Z^2\ +\ d_z\ Z\ . \qquad \text{(A.2.16)}$$

Levando-se as expressões (A.2.15-16) na expressão (A.2.6), obteremos:

$$L(\dot{\vec{r}},\ \vec{r},\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ (\dot{X}^2\ +\ \dot{Y}^2)\ -\ \tfrac{B^2(t)}{8\ a(t)}\ (X^2\ +\ Y^2)\ +$$

$$+\ c(t)(X^2\ +\ Y^2)\ +\ d_x(t)\ (X\ cos\ \alpha\ +\ Y\ sen\ \alpha)\ +$$

$$+\ d_y(t)\ (-\ X\ sen\ \alpha\ +\ Y\ cos\ \alpha)\ +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \dot{Z}^2\ +\ c(t)\ Z^2\ +\ d_z(t)\ Z\ =$$

$$=\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \Big[\ (\dot{X}^2\ +\ \dot{Y}^2\ +\ \dot{Z}^2)\ -\ \tfrac{B^2(t)}{4\ a^2(t)}\ (X^2\ +\ Y^2)\ +$$

$$+\ \tfrac{2\ c(t)}{a(t)}\ (X^2 + Y^2 + Z^2)\ \Big] + X\ [cos\ \alpha\ d_x(t)\ -\ sen\ \alpha\ d_y(t)] +$$

$$+\ Y\ [sen\ \alpha\ d_x(t)\ +\ cos\ \alpha\ d_y(t)]\ +\ Z\ d_z(t)\ \ \rightarrow$$

$$L(\dot{\vec{r}},\ \vec{r},\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \Big(\ (\dot{X}^2\ +\ \dot{Y}^2\ +\ \dot{Z}^2)\ -$$

$$-\ [\tfrac{B^2(t)}{4\ a^2(t)}\ -\ \tfrac{2\ c(t)}{a(t)}]\ (X^2\ +\ Y^2)\ -\ [-\ \tfrac{2\ c(t)}{a(t)}\ Z^2]\ \Big)\ +$$

$$+ X \; [cos \; \alpha \; d_x(t) \; - \; sen \; \alpha \; d_y(t)] \; +$$

$$+ Y \; [sen \; \alpha \; d_x(t) \; + \; cos \; \alpha \; d_y(t)] \; + \; Z \; d_z(t) \; . \qquad (A.2.17)$$

Agora, vamos apresentar as seguintes definições [lembrar que $\alpha(t)$ e usar as expressões (A.2.3,9b,10a)]:

$$\Omega_x^2(t) \; = \; \Omega_y^2(t) \; = \; \Omega^2(t) \; =$$

$$= \; \omega^2(t) \; - \; \frac{2 \; c(t)}{a(t)} \; = \; \frac{B^2(t)}{4 \; a^2(t)} \; - \; \frac{2 \; c(t)}{a(t)} \; , \qquad (A.2.18a)$$

$$\Omega_z^2(t) \; = \; - \; \frac{2 \; c(t)}{a(t)} \; , \qquad (A.2.18b)$$

$$\vec{D}(t) \; = \; D_x(t) \; \hat{I} \; + \; D_y(t) \; \hat{J} \; + \; D_z(t) \; \hat{K} \; = \; \Re^{- \, 1} \; \vec{d}(t) \; =$$

$$= \begin{bmatrix} cos \; \alpha & - \; sen \; \alpha & 0 \\ sen \; \alpha & cos \; \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x(t) \\ d_y(t) \\ d_z(t) \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$D_x(t) \; = \; cos \; \alpha \; d_x(t) \; - \; sen \; \alpha \; d_y(t) \; , \qquad (A.2.19a)$$

$$D_y(t) \; = \; sen \; \alpha \; d_x(t) \; + \; cos \; \alpha \; d_y(t) \; , \qquad (A.2.19b)$$

$$D_z(t) \; = \; d_z(t) \; . \qquad (A.2.19c)$$

Substituindo-se as expressões (A.2.18a-b,19a-c) na expressão (A.2.17), resultará:

$$L(\dot{\vec{r}}, \; \vec{r}, \; t) \; = \; \frac{1}{2} \; a(t) \; \Big(\; (\dot{X}^2 \; + \; \dot{Y}^2 \; + \; \dot{Z}^2) \; -$$

$$- \; [\Omega_x(t) \; X^2 \; + \; \Omega_y(t) \; Y^2 \; + \; \Omega_z(t)^2 \; Z^2] \; \Big) \; +$$

$$+ D_x(t)\ X\ +\ D_y(t)\ Y\ +\ D_z(t)\ Z\ . \qquad \text{(A.2.20)}$$

A expressão acima pode ser escrita na forma compacta (lembrar que $R^2\ =\ X^2\ +\ Y^2\ +\ Z^2$):

$$L(\dot{\vec{r}},\ \vec{r},\ t)\ =\ \sum_{i=x,y,z} L_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t)\ , \qquad \text{(A.2.21a)}$$

onde:

$$L_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t)\ =\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ [\dot{R}_i^2\ -\ \Omega_i^2(t)\ R_i^2]\ +$$

$$+\ D_i(t)\ R_i\ , \qquad \text{(A.2.21b)}$$

sendo:

$$R_x\ =\ X,\ R_y\ =\ Y,\ R_z\ =\ Z,\ \dot{R}_x\ =\ \dot{X},\ \dot{R}_y\ =\ \dot{Y},\ \dot{R}_z\ =\ \dot{Z}.$$

A expressão (A.2.21b) representa o **lagrangiano de um oscilador harmônico forçado tridimensional** com massa e freqüência dependente do tempo. Assim, o **propagador de Feynman** correspondente será dado por:[4]

$$K(R_i",\ R_i';\ t",\ t')\ =$$

$$=\ \prod_{i=1}^{3} K_i^{OHF}\ (R_i",\ R_i';\ t",\ t')\ , \qquad \text{(A.2.22)}$$

onde $t"$ e t' representam, respectivamente, os tempos final e inicial, e $K_i^{OHF}\ (R_i",\ R_i';\ t",\ t')$ é o propagador de um **oscilador harmônico forçado unidimensional** com freqüência e massa dependentes do tempo, cujo cálculo passaremos a realizar em seguida.

A.3. Propagador do Oscilador Harmônico

Forçado Unidimensional

O cálculo do propagador do oscilador harmônico forçado unidimensional com massa e freqüência dependentes do tempo, objeto deste item, será realizado por intermédio da solução da **equação de Schrödinger** correspondente ao problema em estudo. Para esta solução, aplicaremos uma transformação dilatação-rotação a essa equação e, com isso, mostraremos que o propagador procurado pode ser obtido do **propagador da partícula livre** em um novo sistema de coordenadas espaço-temporal.[5]

Considerando-se o lagrangiano representado pela expressão (A.2.21b), o hamiltoniano correspondente será dado por:[3]

$$H_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t) \ = \ \dot{R}_i\ P_i \ - \ L_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t)\ , \qquad \text{(A.3.1a)}$$

$$P_i \ = \ \frac{\partial L_i}{\partial \dot{R}_i}\ . \qquad \text{(A.3.1b)}$$

Considerando-se a expressão (A.2.21b), a expressão acima nos mostra que:

$$P_i \ = \ a(t)\ \dot{R}_i\ . \qquad \text{(A.3.1c)}$$

Usando-se as expressões (A.2.21b) e (A.3.1a-c), resultará:

$$H_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t) \ = \ \dot{R}_i\ \frac{\partial L_i}{\partial \dot{R}_i} \ - \ L_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t) \ =$$

$$= \ \dot{R}_i\ a(t)\ \dot{R}_i \ - \ \Big(\ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ [\dot{R}_i^2 \ - \ \Omega_i^2(t)\ R_i^2] \ + \ D_i(t)\ R_i\ \Big) \ =$$

$$= \ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \dot{R}_i^2 \ + \ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \Omega_i^2(t)\ R_i^2 \ - \ D_i(t)\ R_i \quad \to$$

$$H_i(\dot{R}_i,\ R_i,\ t) \ = \ \frac{1}{2\ a(t)}\ P_i^2 \ +$$

$$+ \ \tfrac{1}{2}\ a(t)\ \Omega_i^2(t)\ R_i^2\ -\ D_i(t)\ R_i\ . \qquad \text{(A.3.2)}$$

De posse desse hamiltoniano, a **equação de Schrödinger** será dada por:[6]

$$\hat{H}_i\ \Psi(R_i,\ t)\ =\ i\ \hbar\ \tfrac{\partial}{\partial t}\ \Psi(R_i,\ t)\ ,$$

onde o operador $\hat{H}_i$ é obtido da expressão (A.3.2), na qual se faz a seguinte substituição:

$$P_i\ \ \rightarrow\ \ -\ i\ \hbar\ \tfrac{\partial}{\partial R_i}\ . \qquad \text{(A.3.3)}$$

Desse modo, teremos (a partir daqui, faremos $\hbar\ =\ 1$):

$$i\ \tfrac{\partial \Psi(R_i,\ t)}{\partial t}\ =\ -\ \tfrac{1}{2\ a(t)}\ \tfrac{\partial^2 \Psi(R_i,\ t)}{\partial R_i^2}\ +$$

$$+\ [\tfrac{1}{2}\ a(t)\ \Omega_i^2(t)\ R_i^2\ -\ D_i(t)\ R_i]\ \Psi(R_i,\ t)\ . \qquad \text{(A.3.4)}$$

Para resolvermos a **equação de Schrödinger** indicada pela expressão acima, façamos a seguinte transformação dilatação-rotação:[7]

$$R_i\ =\ s_i(\tau)\ \bar{R}_i\ +\ p_i(\tau)\ , \qquad \text{(A.3.5a)}$$

$$\bar{R}_i\ =\ \tfrac{1}{s_i(\tau)}\ [R_i\ -\ p_i(\tau)]\ , \qquad \text{(A.3.5b)}$$

onde τ é uma função de valor único e definida por:

$$\tau\ =\ \int^t \mu(\alpha)\ d\alpha\ \ \rightarrow\ \ \tfrac{d\tau}{dt} \equiv \dot{\tau}\ =\ \mu(t)\ . \qquad \text{(A.3.6a-b)}$$

Seguindo-se a transformação indicada pela expressão (A.3.5a), deveremos ter:

$$\Psi(R_i,\ t) \quad \to \quad \Phi(\bar{R}_i,\ \tau)\ , \qquad \text{(A.3.7)}$$

e, portanto, para resolvermos a expressão (A.3.4) precisamos escrever as derivadas $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2}{\partial R_i^2}$, em termos de $(\bar{R}_i,\ \tau)$. Assim, usando-se as expressões (A.3.5b,6b), teremos (lembrar que R_i e τ são variáveis independentes):

$$\frac{\partial}{\partial t} \ = \ \frac{\partial}{\partial \tau}\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \ + \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \frac{\partial \bar{R}_i}{\partial t} \ = \ \mu(t)\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ + \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \frac{\partial \bar{R}_i}{\partial \tau}\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \ =$$

$$= \ \mu(t)\ [\frac{\partial}{\partial \tau} \ + \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \frac{\partial \bar{R}_i}{\partial \tau}] \ =$$

$$= \ \mu(t)\ \Big[\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ + \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \frac{\partial}{\partial \tau}\ \Big(\ \frac{1}{s_i(\tau)}\ [R_i \ - \ p_i(\tau)]\ \Big)\ \Big] \ =$$

$$= \ \mu(t)\ \Big[\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ + \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \Big(\ \frac{1}{s_i(\tau)}\ [\frac{\partial R_i}{\partial \tau} \ - \ \frac{\partial p_i(\tau)}{\partial \tau}] \ +$$

$$+ \ [R_i \ - \ p_i(\tau)]\ \frac{\partial}{\partial \tau}\ \frac{1}{s_i(\tau)}\ \Big)\ \Big] \ =$$

$$= \ \mu(t)\ \Big[\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ + \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \Big(\ \frac{1}{s_i(\tau)}\ [0 \ - \ p'_i] \ -$$

$$- \ [R_i \ - \ p_i(\tau)]\ \frac{1}{s_i^2}\ \frac{\partial s_i(\tau)}{\partial \tau}\ \Big)\ \Big] \ =$$

$$= \ \mu(t)\ \Big[\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ - \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \Big(\ \frac{p'_i}{s_i(\tau)} \ + \ \frac{1}{s_i(\tau)}\ [R_i \ - \ p_i(\tau)]\ \frac{s'_i}{s_i(\tau)}\ \Big)\ \Big] \quad \to$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ = \ \mu(t)\ \Big(\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ - \ [\frac{p'_i}{s_i(\tau)} \ + \ \frac{s'_i}{s_i(\tau)}\ \bar{R}_i]\ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\ \Big)\ , \qquad \text{(A.3.8a)}$$

onde:

$$p'_i \ = \ \frac{\partial p_i(\tau)}{\partial \tau} \equiv \frac{dp_i}{d\tau}, \qquad s'_i \ = \ \frac{\partial s_i(\tau)}{\partial \tau} \equiv \frac{ds_i}{d\tau}\ . \qquad \text{(A.3.8b-c)}$$

De maneira análoga, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial R_i} = \frac{\partial}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial R_i} + \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\,\frac{\partial \bar{R}_i}{\partial R_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\,\frac{\partial}{\partial R_i}\,\Big(\,\frac{1}{s_i(\tau)}\,[R_i - p_i(\tau)]\,\Big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\,\Big(\,\frac{1}{s_i(\tau)}\,[\frac{\partial R_i}{\partial R_i} - \frac{\partial p_i(\tau)}{\partial R_i}]\,\Big) \to$$

$$\frac{\partial}{\partial R_i} = \frac{1}{s_i}\,\frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} = \frac{1}{s_i^2}\,\frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\,. \qquad \text{(A.3.9a-b)}$$

Substituindo-se as expressões (A.3.8a,9b) na expressão (A.3.4) e usando-se as expressões (A.3.5a,7), obteremos [lembrar que $\mu(t)$, $s_i(\tau)$, $p_i(\tau)$, $D_i(t)$, $a(t)$ e $\tau(t)$]:

$$i\,\mu\,\Big[\,\frac{\partial}{\partial \tau} - (\frac{p_i'}{s_i} + \frac{s_i'}{s_i}\,\bar{R}_i)\,\frac{\partial}{\partial \bar{R}_i}\,\Big]\,\Phi(\bar{R}_i,\,\tau) + \frac{1}{2\;a\;s_i^2}\,\frac{\partial^2 \Phi(\bar{R}_i,\,\tau)}{\partial \bar{R}_i^2} -$$

$$-\,\Big[\,\frac{1}{2}\,a\,\Omega_i^2\,(s_i^2\,\bar{R}_i^2 + p_i^2 + 2\,s_i\,\bar{R}_i\,p_i) +$$

$$+\,D_i\,(s_i\,\bar{R}_i + p_i)\,\Big]\,\Phi(\bar{R}_i,\,\tau) = 0\,. \qquad \text{(A.3.10)}$$

Agora, fazendo-se o **ansatz**:[8]

$$\Phi(\bar{R}_i,\,\tau) = exp\,[i\,f(\bar{R}_i,\,\tau)]\;\chi(\bar{R}_i,\,\tau)\,, \qquad \text{(A.3.11)}$$

teremos [lembrar que $\Phi(\bar{R}_i,\,\tau)$]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = exp\,(i\,f)\,\frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \chi\,\frac{\partial}{\partial \tau}\,[exp\,(i\,f)] =$$

$$= exp\,(i\,f)\,\frac{\partial \chi}{\partial \tau} + i\,exp\,(i\,f)\,\chi\,\frac{\partial f}{\partial \tau} \to$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = exp\,(i\,f)\,(i\,\chi\,\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial \chi}{\partial \tau})\,. \qquad \text{(A.3.12a)}$$

De maneira análoga, virá:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{R}_i} = exp\,(i\,f)\,(i\,\chi\,\frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i})\,, \qquad \text{(A.3.12b)}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{R}_i^2} \ = \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i} \ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{R}_i} \ =$$

$$= \ exp \ (i \ f) \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i} \ (i \ \chi \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i}) \ +$$

$$+ \ (i \ \chi \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i}) \ \frac{\partial}{\partial \bar{R}_i} \ [exp \ (i \ f)] \ =$$

$$= \ exp \ (i \ f) \ (i \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i} \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ i \ \chi \ \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{R}_i^2} \ + \ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{R}_i^2}) \ +$$

$$+ \ exp \ (i \ f) \ (i \ \chi \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i}) \ (i \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i}) \ \ \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{R}_i^2} \ = \ exp \ (i \ f) \ \Big(\ \chi \ [i \ \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{R}_i^2} \ - \ (\frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i})^2] \ +$$

$$+ \ 2 \ i \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i} \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{R}_i^2} \ \Big) \ . \qquad \text{(A.3.12c)}$$

Substituindo-se as expressões (A.3.12a-c) na expressão (A.3.10), resultará:

$$i \ \mu \ exp \ (i \ f) \ (i \ \chi \ \frac{\partial f}{\partial \tau} \ + \ \frac{\partial \chi}{\partial \tau}) \ - \ i \ \mu \ (\frac{p_i'}{s_i} \ + \ \frac{s_i'}{s_i} \ \bar{R}_i) \ \times$$

$$\times \ exp \ (i \ f) \ (i \ \chi \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i}) \ +$$

$$+ \ \frac{1}{2 \ a \ s_i^2} \ exp \ (i \ f) \ \Big(\ \chi \ [i \ \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{R}_i^2} \ - \ (\frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i})^2] \ +$$

$$+ \ 2 \ i \ \frac{\partial \chi}{\partial \bar{R}_i} \ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i} \ + \ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{R}_i^2} \ \Big) \ -$$

$$- \ \frac{1}{2} \ a \ \Omega_i^2 \ (s_i^2 \ \bar{R}_i^2 \ + \ p_i^2 \ + \ 2 \ s_i \ \bar{R}_i \ p_i) \ exp \ (i \ f) \ \chi \ +$$

$$+ \ D_i \ (s_i \ \bar{R}_i \ + \ p_i) \ exp(i \ f) \ \chi \ = \ 0 \ \ \ \rightarrow$$

$$(i\ \mu\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ +\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ \frac{\partial^2}{\partial\bar{R}_i^2})\ \chi\ -\ i\ \frac{\partial\chi}{\partial\bar{R}_i}\ (\mu\ \frac{p_i'}{s_i}\ +\ \mu\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i\ -$$

$$-\ \frac{1}{a\ s_i^2}\ \frac{\partial f}{\partial\bar{R}_i})\ +\ \Big(\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ [i\ \frac{\partial^2 f}{\partial\bar{R}_i^2}\ -\ (\frac{\partial f}{\partial\bar{R}_i})^2]\ +\ \mu\ \frac{p_i'}{s_i}\ \frac{\partial f}{\partial\bar{R}_i}\ +$$

$$+\ \mu\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i\ \frac{\partial f}{\partial\bar{R}_i}\ -\ \mu\ \frac{\partial f}{\partial\tau}\ -\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ s_i^2\ \bar{R}_i^2\ -\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ p_i^2\ -$$

$$-\ \Omega_i^2\ a\ s_i\ \bar{R}_i\ p_i\ +\ D_i\ s_i\ \bar{R}_i\ +\ D_i\ p_i\ \Big)\ \chi = 0\ . \qquad \text{(A.3.13)}$$

A partir desse momento, nosso objetivo será o de transformar a expressão (A.3.13) na **equação de Schrödinger para a partícula livre**. Atingiremos esse objetivo por etapas. Na primeira etapa, faremos a seguinte imposição:

$$\mu\ \frac{p_i'}{s_i}\ +\ \mu\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i\ -\ \frac{1}{a\ s_i^2}\ \frac{\partial f}{\partial\bar{R}_i}\ =\ 0\ . \qquad \text{(A.3.14a)}$$

Integrando-se a expressão acima, resultará (lembrar que R_i e τ são variáveis independentes):

$$f(\bar{R}_i,\ \tau)\ =\ \mu\ a\ s_i\ p_i'\ \bar{R}_i\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ \mu\ a\ s_i'\ s_i\ \bar{R}_i^2\ +\ f_1(\tau)\ . \qquad \text{(A.3.14b)}$$

Derivando-se a expressão acima, obteremos:

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{R}_i}\ =\ \mu\ a\ s_i\ p_i'\ +\ \mu\ a\ s_i'\ s_i\ \bar{R}_i\ , \qquad \text{(A.3.15a)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{R}_i^2}\ =\ \mu\ a\ s_i'\ s_i\ , \qquad \text{(A.3.15b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}\ =\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ (\mu\ a\ s_i\ p_i'\ \bar{R}_i)\ +$$

$$+\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ (\frac{1}{2}\ \mu\ a\ s_i'\ s_i\ \bar{R}_i^2)\ +\ \frac{df_1}{d\tau}\ . \qquad \text{(A.3.15c)}$$

Usando-se as expressões (A.3.15a-c), calculemos as seguintes expressões:

$$\frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ [i\ \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{R}_i^2}\ -\ (\frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i})^2]\ =$$

$$=\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ [i\ \mu\ a\ s_i\ s_i'\ -(\mu\ a\ s_i\ p_i'\ +\ \mu\ a\ s_i\ s_i'\ \bar{R}_i)^2]\ =$$

$$=\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ (i\ \mu\ a\ s_i\ s_i'\ -\ \mu^2\ a^2\ s_i^2\ p_i'^2\ -$$

$$-\ \mu^2\ a^2\ s_i^2\ s_i'^2\ \bar{R}_i^2\ -\ 2\ \mu^2\ a^2\ s_i^2\ p_i'\ s_i'\ \bar{R}_i)\ \ \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ [i\ \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{R}_i^2}\ -\ (\frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i})^2]\ =\ \frac{i\ \mu\ s_i'}{2\ s_i}\ -$$

$$-\ \frac{\mu^2\ a\ p_i'2}{2}\ -\ \frac{\mu^2\ a\ s_i'2\ \bar{R}_i^2}{2}\ -\ \mu^2\ a\ p_i'\ s_i'\ \bar{R}_i\ , \qquad \text{(A.3.16)}$$

$$\mu\ \frac{p_i'}{s_i}\ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i}\ +\ \mu\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i\ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i}\ =\ \mu\ (\frac{p_i'}{s_i}\ +\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i)\ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i}\ =$$

$$=\ \mu\ (\frac{p_i'}{s_i}\ +\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i)\ (\mu\ a\ s_i\ p_i'\ +\ \mu\ a\ s_i\ s_i'\bar{R}_i)\ =$$

$$=\ \mu^2\ a\ p_i'^2\ +\ \mu^2\ a\ p_i'\ s_i'\bar{R}_i\ +\ \mu^2\ a\ s_i'\ p_i'\ \bar{R}_i\ +\ \mu^2\ a\ s_i'^2\ \bar{R}_i^2\ =$$

$$=\ \mu^2\ a\ p_i'^2\ +\ 2\ \mu^2\ a\ p_i'\ s_i'\bar{R}_i\ +\ \mu^2\ a\ s_i'^2\ \bar{R}_i^2\ \ \rightarrow$$

$$\mu\ \frac{p_i'}{s_i}\ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i}\ +\ \mu\ \frac{s_i'}{s_i}\ \bar{R}_i\ \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_i}\ =$$

$$=\ \mu^2\ a\ [p_i'^2\ +\ (2\ p_i'\ s_i'\ +\ s_i'^2\ \bar{R}_i)\ \bar{R}_i]\ . \qquad \text{(A.3.17)}$$

Levando-se as expressões (A.3.14a,15c,16-17) na expressão (A.3.13), resultará:

$$(i\ \mu\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ +\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ \frac{\partial^2}{\partial\bar{R}_i^2})\ \chi\ +\ \Big(\ \frac{i\ \mu\ s_i'}{2\ s_i}\ -\ \frac{\mu^2\ a\ p_i'2}{2}\ -\ \frac{\mu^2\ a\ s_i'2\ \bar{R}_i^2}{2}\ -$$

$$-\ \mu^2\ a\ p_i'\ s_i'\ \bar{R}_i\ +\ \mu^2\ a\ [p_i'^2\ +\ (2\ p_i'\ s_i'\ +\ s_i'^2\ \bar{R}_i)\ \bar{R}_i\ -$$

$$-\ \mu\ [\frac{\partial}{\partial\tau}\ (\mu\ a\ s_i\ p_i'\ \bar{R}_i)\ +\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ (\frac{1}{2}\ \mu\ a\ s_i'\ s_i\ \bar{R}_i^2)\ +\ \frac{df_1}{d\tau}]\ -$$

$$-\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ s_i^2\ \bar{R}_i^2\ -\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ p_i^2\ -$$

$$-\ \Omega_i^2\ a\ s_i\ \bar{R}_i\ p_i\ +\ D_i\ s_i\ \bar{R}_i\ +\ D_i\ p_i\ \Big)\ \chi\ =\ 0\ \ \ \rightarrow$$

$$(i\ \mu\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ +\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ \frac{\partial^2}{\partial\bar{R}_i^2})\ \chi\ =$$

$$=\ \Big(\ \bar{R}_i^2\ [\frac{\mu}{2}\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ (\mu\ a\ s_i\ s_i')\ -\ \frac{1}{2}\ \mu^2\ a\ s_i'^2\ +\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ s_i^2]\ +$$

$$+\ \bar{R}_i^1\ [\mu\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ (\mu\ a\ s_i\ p_i')\ -\ \mu^2\ a\ s_i'\ p_i'\ +\ \Omega_i^2\ a\ s_i\ p_i\ -\ D_i\ s_i]\ +$$

$$+\ \bar{R}_i^0\ (\mu\ \frac{df_1}{d\tau}\ -\ i\ \frac{\mu}{2}\ \frac{s_i'}{s_i}\ -\ \frac{1}{2}\mu^2\ a\ p_i'^2\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ p_i^2\ -\ D_i\ p_i)\ \Big)\ \chi\ .\qquad (A.3.18)$$

Agora, como segunda etapa de nosso objetivo, vamos anular o segundo membro da expressão (A.3.18). Contudo, como esse segundo membro é um polinômio de $\bar{R}_i$, vamos anular cada termo desse polinômio. Desse modo, teremos:

$$\frac{\mu}{2}\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ (\mu\ a\ s_i\ s_i')\ -\ \frac{1}{2}\ \mu^2\ a\ s_i'^2\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ s_i^2\ =\ 0\ .\qquad (A.3.19)$$

Antes de fazermos a derivada indicada acima, vamos obter alguns resultados que serão usados nessa derivada. Assim, usando-se a expressão (A.3.6b), teremos:

$$s'_i \; = \; \frac{ds_i}{d\tau} \; = \; \frac{ds_i}{dt} \, \frac{dt}{d\tau} \quad \rightarrow \quad s'_i \; = \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; , \qquad \text{(A.3.20a)}$$

$$\frac{ds'_i}{d\tau} \; = \; \frac{ds'_i}{dt} \, \frac{dt}{d\tau} \; = \; \frac{1}{\mu} \, \frac{d}{dt} \, \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; = \; \frac{1}{\mu} \, \frac{\mu \; \ddot{s}_i \; - \; \dot{\mu} \; \dot{s}_i}{\mu^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{ds'_i}{d\tau} \; = \; \frac{\ddot{s}_i}{\mu^2} \; - \; \frac{\dot{\mu} \; \dot{s}_i}{\mu^3} \; , \qquad \text{(A.3.20b)}$$

$$\frac{da}{d\tau} \; = \; \frac{da}{dt} \, \frac{dt}{d\tau} \; = \; \frac{\dot{a}}{\mu} \; , \qquad \frac{d\mu}{d\tau} \; = \; \frac{d\mu}{dt} \, \frac{dt}{d\tau} \; = \; \frac{\dot{\mu}}{\mu}. \qquad \text{(A.3.20c-d)}$$

De posse das expressões (A.3.20a-d), voltemos à expressão (A.3.19). Portanto, teremos:

$$\frac{\mu}{2} \, (\frac{d\mu}{d\tau} \; a \; s_i \; s'_i + \; \mu \; \frac{da}{d\tau} \; s_i \; s'_i \; + \; \mu \; a \; \frac{ds_i}{d\tau} \; s'_i \; + \; \mu \; a \; s_i \; \frac{ds'_i}{d\tau}) \; -$$

$$- \; \frac{1}{2} \; \mu^2 \; a \; s'^2_i \; + \; \frac{1}{2} \; a \; \Omega^2_i \; s^2_i \; =$$

$$= \; \frac{\mu}{2} \; \frac{\dot{\mu}}{\mu} \; a \; s_i \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; + \; \frac{\mu}{2} \; \mu \; \frac{\dot{a}}{\mu} \; s_i \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; + \; \frac{\mu}{2} \; \mu \; a \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; +$$

$$+ \; \frac{\mu}{2} \; \mu \; a \; s_i \; (\frac{\ddot{s}_i}{\mu^2} \; - \; \frac{\dot{\mu} \; \dot{s}_i}{\mu^3}) \; - \; \frac{1}{2} \; \mu^2 \; a \; \frac{\dot{s}^2_i}{\mu^2} \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2} \; a \; \Omega^2_i \; s^2_i \; = \; \frac{\dot{\mu} \; a \; s_i \; \dot{s}_i}{2 \; \mu} \; + \; \frac{\dot{a} \; s_i \; \dot{s}_i}{2} \; + \; \frac{a \; \dot{s}^2_i}{2} \; +$$

$$+ \; \frac{a \; s_i \; \ddot{s}_i}{2} \; - \; \frac{a \; s_i \; \dot{\mu} \; \dot{s}_i}{2 \; \mu} \; - \; \frac{1}{2} \; a \; \dot{s}^2_i \; + \; \frac{1}{2} \; a \; \Omega^2_i \; s^2_i \; =$$

$$= \; \frac{\dot{a} \; s_i \; \dot{s}_i}{2} \; + \; \frac{a \; s_i \; \ddot{s}_i}{2} \; + \; \frac{1}{2} \; a \; \Omega^2_i \; s^2_i \; = \; 0 \quad \rightarrow$$

$$\ddot{s}_i \; + \; \frac{\dot{a}}{a} \; \dot{s}_i \; + \; \Omega^2_i \; s_i \; = \; 0 \; . \qquad \text{(A.3.21)}$$

Agora, anulemos o segundo termo do segundo membro da expressão (A.3.18), ou seja:

$$\mu \, \frac{\partial}{\partial \tau} \, (\mu \; a \; s_i \; p_i') \; - \; \mu^2 \; a \; s_i' \; p_i' \; +$$

$$+ \; \Omega_i^2 \; a \; s_i \; p_i \; - \; D_i \; s_i \; = \; 0 \; . \qquad \text{(A.3.22)}$$

Como no caso anterior, antes de efetuarmos a derivada indicada na expressão (A.3.22), consideremos a (A.3.6b) para obtermos as seguintes expressões:

$$p_i' \; = \; \frac{dp_i}{d\tau} \; = \; \frac{dp_i}{dt} \, \frac{dt}{d\tau} \; \rightarrow \; p_i' \; = \; \frac{\dot{p}_i}{\mu} \; , \qquad \text{(A.3.23a)}$$

$$\frac{dp_i'}{d\tau} \; = \; \frac{dp_i'}{dt} \, \frac{dt}{d\tau} \; = \; \frac{1}{\mu} \, \frac{d}{dt} \, \frac{\dot{p}_i}{\mu} \; = \; \frac{1}{\mu} \, \frac{\mu \; \ddot{p}_i \; - \; \dot{\mu} \; \dot{p}_i}{\mu^2} \; \rightarrow$$

$$\frac{dp_i'}{d\tau} \; = \; \frac{\ddot{p}_i}{\mu^2} \; - \; \frac{\dot{\mu} \; \dot{p}_i}{\mu^3} \; . \qquad \text{(A.3.23b)}$$

Usando-se as expressões (A.3.20a-d,23a-b) na expressão (A.3.22), virá:

$$\mu \, (\frac{d\mu}{d\tau} \; a \; s_i \; p_i' + \; \mu \; \frac{da}{d\tau} \; s_i \; p_i' \; + \; \mu \; a \; \frac{ds_i}{d\tau} \; p_i' \; + \; \mu \; a \; s_i \; \frac{dp_i'}{d\tau}) \; -$$

$$- \; \mu^2 \; a \; s_i' \; p_i' \; + \; \Omega_i^2 \; a \; s_i \; p_i \; - \; D_i \; s_i \; =$$

$$= \; \mu \; \frac{\dot{\mu}}{\mu} \; a \; s_i \; \frac{\dot{p}_i}{\mu} \; + \; \mu \; \mu \; \frac{\dot{a}}{\mu} \; s_i \; \frac{\dot{p}_i}{\mu} \; + \; \mu \; \mu \; a \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; \frac{\dot{p}_i}{\mu} \; +$$

$$+ \; \mu \; \mu \; a \; s_i \; (\frac{\ddot{p}_i}{\mu^2} \; - \; \frac{\dot{\mu} \; \dot{p}_i}{\mu^3}) \; - \; \mu^2 \; a \; \frac{\dot{s}_i}{\mu} \; \frac{\dot{p}_i}{\mu} \; +$$

$$+ \; \Omega_i^2 \; a \; s_i \; p_i \; - \; D_i \; s_i \; = \; \frac{\dot{\mu} \; a \; s_i \; \dot{p}_i}{\mu} \; +$$

$$+ \; \dot{a} \; s_i \; \dot{p}_i \; + \; a \; \dot{s}_i \; \dot{p}_i \; + \; a \; s_i \; \ddot{p}_i \; - \; \frac{a \; s_i \; \dot{\mu} \; \dot{p}_i}{\mu} \; -$$

$$- \; a \; \dot{s}_i \; \dot{p}_i \; + \; \Omega_i^2 \; a \; s_i \; p_i \; - \; D_i \; s_i \; =$$

$$= \dot{a}\ s_i\ \dot{p}_i\ +\ a\ s_i\ \ddot{p}_i\ +\ \Omega_i^2\ a\ s_i\ p_i\ -\ D_i\ s_i\ =\ 0\ \ \rightarrow$$

$$\ddot{p}_i\ +\ \tfrac{\dot{a}}{a}\ \dot{p}_i\ +\ \Omega_i^2\ p_i\ =\ \tfrac{D_i}{a}\ . \qquad \text{(A.3.24)}$$

Por fim, anulemos o terceiro termo do segundo membro da expressão (A.3.18), ou seja:

$$\mu\ \tfrac{df_1}{d\tau}\ -\ i\ \tfrac{\mu}{2}\ \tfrac{s_i'}{s_i}\ -\ \tfrac{1}{2}\mu^2\ a\ p_i'^2\ +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\ a\ \Omega_i^2\ p_i^2\ -\ D_i\ p_i\ =\ 0\ . \qquad \text{(A.3.25)}$$

Usando-se as expressões (A.3.6b,20a,23a), a expressão acima será escrita na forma:

$$\tfrac{df_1}{dt}\ =\ \tfrac{i}{2}\ \tfrac{\dot{s}_i}{s_i}\ +\ \tfrac{1}{2}\ a\ \dot{p}_i^2\ -\ \tfrac{1}{2}\ \Omega_i^2\ a\ p_i^2\ +\ D_i\ p_i\ . \qquad \text{(A.3.26)}$$

Integrando-se a expressão acima, resultará:

$$f_1\ =\ \tfrac{i}{2}\ \int^t\ \tfrac{ds_i(t')}{s_i(t')}\ +\ \tfrac{1}{2}\ \int^t\ [a(t')\ \dot{p}_i^2(t')\ -$$

$$-\ \Omega_i^2(t')\ a(t')\ p_i^2(t')\ +\ 2\ D_i(t')\ p_i(t')]\ dt'\ \ \rightarrow$$

$$f_1\ =\ i\ \ell n\ \sqrt{s_i}\ +\ \tfrac{1}{2}\ \int^t\ [a(t')\ \dot{p}_i^2(t')\ -$$

$$-\ \Omega_i^2(t')\ a(t')\ p_i^2(t')\ +\ 2\ D_i(t')\ p_i(t')]\ dt'\ . \qquad \text{(A.3.27)}$$

Para realizarmos a integração indicada na expressão acima, façamos o seguinte artifício. Partindo-se da expressão (A.3.24), teremos:

$$a\ \ddot{p}_i\ +\ \dot{a}\ \dot{p}_i\ +\ \Omega_i^2\ a\ p_i\ =\ D_i\ \ \rightarrow$$

$$a\ \ddot{p}_i\ p_i\ +\ \dot{a}\ \dot{p}_i\ p_i\ +\ \Omega_i^2\ a\ p_i^2\ =\ D_i\ p_i\ . \qquad \text{(A.3.28)}$$

Por outro lado, podemos escrever que:

$$\frac{d}{dt}\ (a\ p_i\ \dot{p}_i)\ =\ \dot{a}\ p_i\ \dot{p}_i\ +\ a\ \dot{p}_i\ \dot{p}_i\ +\ a\ p_i\ \ddot{p}_i\ \ \to$$

$$\dot{a}\ p_i\ \dot{p}_i\ +\ a\ p_i\ \ddot{p}_i\ =\ \frac{d}{dt}\ (a\ p_i\ \dot{p}_i)\ -\ a\ \dot{p}_i^2\ . \qquad \text{(A.3.29)}$$

Comparando-se as expressões (A.3.28-29), virá:

$$a\ \dot{p}_i^2\ -\ \Omega_i^2\ a\ p_i^2\ =\ \frac{d}{dt}\ (a\ p_i\ \dot{p}_i)\ -\ D_i\ p_i\ . \qquad \text{(A.3.30)}$$

Substituindo-se a expressão (A.3.30) na (A.3.27), teremos:

$$f_1[\tau(t)]\ =\ i\ \ell n\ \sqrt{s_i}\ +\ \frac{1}{2}\int^t \Big(\ \frac{d}{dt'}\ [a(t')\ p_i(t')\ \dot{p}_i(t')]\ -$$

$$-\ D_i(t')\ p_i(t')\ +\ 2\ D_i(t')\ p_i(t')\ \Big)\ dt'\ \ \to$$

$$f_1[\tau(t)]\ =\ i\ \ell n\ \sqrt{s_i}\ +\ \frac{1}{2}\ [a(t)\ p_i(t)\ \dot{p}_i(t)]\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int^t D_i(t')\ p_i(t')\ dt'\ . \qquad \text{(A.3.31)}$$

Tomando-se a expressão (A.3.14b), inserindo-se nela a expressão (A.3.31) e, em seguida, usando-se as expressões (A.3.20a,23a), obteremos:

$$f[\bar{R}_i,\ \tau(t)]\ =\ a\ s_i\ \dot{p}_i\ \bar{R}_i\ +\ \frac{1}{2}\ a\ \dot{s}_i\ s_i\ \bar{R}_i^2\ +\ i\ \ell n\ \sqrt{s_i}\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ a\ p_i\ \dot{p}_i\ +\ \frac{1}{2}\int^t D_i(t')\ p_i(t')\ dt'\ . \qquad \text{(A.3.32)}$$

Em vista das equações (A.3.19,22,25), a (A.3.18) tomará a seguinte forma:

$$(i\ \mu\ \frac{\partial}{\partial\tau}\ +\ \frac{1}{2\ a\ s_i^2}\ \frac{\partial^2}{\partial\bar{R}_i^2})\ \chi\ =\ 0\ \ \to$$

$$(i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2 \ a \ \mu \ s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{R}_i^2}) \ \chi = 0 \ . \qquad (A.3.33)$$

Fazendo-se:[2]

$$a \ \mu \ s_i^2 = M_o = constante \ , \qquad (A.3.34a)$$

teremos:

$$\frac{d}{dt} \ (a \ \mu \ s_i^2) = \frac{dM_o}{dt} = 0 \ \rightarrow$$

$$\dot{a} \ \mu \ s_i^2 + a \ \dot{\mu} \ s_i^2 + 2 \ a \ \mu \ s_i \ \dot{s}_i = 0 \ \ (\div \ a \ \mu \ s_i^2) \ \rightarrow$$

$$2 \ \frac{\dot{s}_i}{s_i} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} = 0 \ . \qquad (A.3.34b)$$

Inserindo-se (A.3.34a) em (A.3.33) e reintroduzindo-se o $\hbar$, resultará:

$$i \ \hbar \ \frac{\partial \chi(\bar{R}_i, \ \tau)}{\partial \tau} = - \ \frac{\hbar^2}{2 \ M_o} \ \frac{\partial^2 \chi(\bar{R}_i, \ \tau)}{\partial \bar{R}_i^2} \ , \qquad (A.3.35)$$

que representa a **equação de Schrödinger para a partícula livre**.[6] Desse modo, usando-se as expressões (A.3.7,11), a solução da **equação de Schrödinger** representada pela expressão (A.3.4) será dada por:

$$\Psi(R_i, t) \equiv \Phi(\bar{R}_i, \ \tau) =$$

$$= exp \ [i \ f(\bar{R}_i, \ \tau)] \ \chi(\bar{R}_i, \ \tau) \ , \qquad (A.3.36)$$

onde f é dado pela expressão (A.3.32) e $\bar{R}_i$ pela expressão (A.3.5b).

Vejamos, agora, como obter o **propagador de Feynman** para a expressão (A.3.4). Assim, uma vez conhecida a **função de onda** para qualquer estado inicial $\Psi(R_i', \ t')$, então a **função de onda** em um estado posterior $\Psi(R_i'', \ t'')$ será dada por:[4]

$$\Psi(R_i'', \ t'') \ =$$

$$= \ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} K(R_i'', \ R_i'; \ t'', \ t') \ \Psi(R_i', \ t') \ dR_i' \ , \qquad (A.3.37a)$$

com a condição:

$$\lim_{t'' \ \to \ t'} K(R_i'', \ R_i'; \ t'', \ t') \ = \ \delta(R_i'' \ - \ R_i') \ . \qquad (A.3.37b)$$

Analogamente, para o caso da partícula livre dado pela expressão (A.3.35), teremos (reintroduzindo-se o $\hbar$):

$$\chi(\bar{R}_i'', \ \tau'') \ =$$

$$= \ \int_{-\ \infty}^{+\ \infty} K_{livre}(\bar{R}_i'', \ \bar{R}_i'; \ \tau'', \ \tau') \ \chi(\bar{R}_i', \ \tau') \ d\bar{R}_i' \ , \qquad (A.3.38a)$$

onde $K_{livre}(\bar{R}_i'', \ \bar{R}_i'; \ \tau'', \ \tau')$ é dado por:[4,6]

$$K_{livre}(\bar{R}_i'', \ \bar{R}_i'; \ \tau'', \ \tau') \ =$$

$$= \ [\frac{M_o}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ (\tau'' \ - \ \tau')}]^{1/2} \ exp \ [\frac{i}{2 \ \hbar} \ \frac{(\bar{R}_i'' \ - \ \bar{R}_i')^2}{(\tau'' \ - \ \tau')}] \ . \qquad (A.3.38b)$$

De posse desses resultados, o propagador que estamos calculando será dado por:[8]

$$K_i^{OHF}(\bar{R}_i'', \ \bar{R}_i'; \ \tau'', \ \tau') \ =$$

$$= \ exp \ [i \ f(\bar{R}_i'', \ \tau'')] \ K_{livre}(\bar{R}_i'', \ \bar{R}_i'; \ \tau'', \ \tau') \ \times$$

$$\times \ exp \ [- \ i \ f^*(\bar{R}_i', \ \tau')] \ , \qquad (A.3.39)$$

onde f^* representa o complexo conjugado de f.

Desse modo, usando-se as expressões (A.3.32,38b) na expressão (A.3.39), resultará (lembrar que $exp \ (- \ \ell n \ \sqrt{s_i}) \ = \ \frac{1}{\sqrt{s_i}}$):

$$K_i^{OHF}(\bar{R}_i'', \ \bar{R}_i'; \ \tau'', \ \tau') \ = \ \left[\frac{M_o}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ s_i(\tau'') \ s_i(\tau') \ (\tau'' \ - \ \tau')} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \ exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \ [a(\tau'') \ s_i(\tau'') \ \dot{s}_i(\tau'') \ (\bar{R}_i'')^2 \ - \right.\right.$$

$$- \ a(\tau') \ s_i(\tau') \ \dot{s}_i(\tau') \ (\bar{R}_i')^2] \ +$$

$$+ \ [a(\tau'') \ s_i(\tau'') \ \dot{p}_i(\tau'') \ \bar{R}_i'' \ - \ a(\tau') \ s_i(\tau') \ \dot{p}_i(\tau') \ \bar{R}_i'] \ +$$

$$+ \ \frac{1}{2} \ [a(\tau'') \ p_i(\tau'') \ \dot{p}_i(\tau'') \ - \ a(\tau') \ p_i(\tau') \ \dot{p}_i(\tau')] \ +$$

$$+ \ \frac{1}{2} \int_{\tau'}^{\tau''} D_i(t) \ p_i(t) \ dt \ +$$

$$\left.\left. + \ \frac{M_o}{2 \ (\tau'' \ - \ \tau')} \ (\bar{R}_i'' \ - \ \bar{R}_i')^2 \right) \right] . \qquad (A.3.40)$$

Usando-se as expressões (A.2.10a-b) e (A.3.5a-b) podemos expressar o propagador visto acima [e dado pela expressão (A.3.40)] em termos das coordenadas originais de R_i (x, y e z). É oportuno destacar que o propagador assim obtido engloba todos os casos tratados na literatura para o lagrangiano dado pela expressão (A.2.1),[4] conforme veremos nos casos particulares tratados a seguir.

A.4. **Casos Particulares**

A.4.1. Oscilador Harmônico Simples Unidimensional Dependente do Tempo

Neste caso, o lagrangiano é dado por:

$$L \ = \ \frac{1}{2} \ m(t) \ [\dot{x}^2 \ - \ \omega(t)^2 \ x^2] \ . \qquad (A.4.1.1)$$

Comparando-se a expressão (A.4.1.1) com as expressões (A.2.21b) e (A.3.5a), teremos:

$$a(t) \ = \ m(t) \ , \qquad R_i \ = \ x \ , \qquad \Omega_i \ = \ \omega(t) \ , \qquad \text{(A.4.1.2a-c)}$$

$$D_i \ = \ D \ = \ 0 \ , \qquad s_i \ = \ s \ , \qquad p_i \ = \ p \ . \qquad \text{(A.4.1.2d-f)}$$

Substituindo-se as expressões (A.4.1.2a-d) nas expressões (A.3.21,24), resultará [lembrar que $m(t)$, $s(t)$, $\omega(t)$ e $p(t)$]:

$$\ddot{s}(t) \ + \ \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \ \dot{s}(t) \ + \ \omega^2(t) \ s(t) \ = \ 0 \ , \qquad \text{(A.4.1.3a)}$$

$$\ddot{p}(t) \ + \ \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \ \dot{p}(t) \ + \ \omega^2(t) \ p(t) \ = \ 0 \ . \qquad \text{(A.4.1.3b)}$$

Comparando-se as expressões (A.4.1.3a-b), virá:

$$s(t) \ = \ p(t) \ . \qquad \text{(A.4.1.3c)}$$

Para resolvermos a equação diferencial representada pelas expressões (A.4.1.3a) ou (A.4.1.3b), usaremos o seguinte artifício. Chamemos:

$$s(t) \ = \ \frac{S(t)}{\sqrt{m(t)}} \ , \qquad \text{(A.4.1.4a)}$$

então:

$$\dot{s} \ = \ \frac{\dot{S}}{\sqrt{m}} \ - \ \frac{\dot{m} \ S}{2 \ m^{3/2}} \ = \ \frac{\dot{S}}{\sqrt{m}} \ - \ \frac{\dot{m} \ S}{2 \ m \ \sqrt{m}} \ , \qquad \text{(A.4.1.4b)}$$

$$\ddot{s} \ = \ \frac{\ddot{S}}{\sqrt{m}} \ - \ \frac{\dot{m} \ \dot{S}}{2 \ m^{3/2}} \ - \ \frac{\dot{S} \ \dot{m}}{2 \ m^{3/2}} \ - \ \frac{S \ \ddot{m}}{2 \ m^{3/2}} \ + \ \frac{3 \ S \ \dot{m} \ \dot{m}}{4 \ m^{5/2}} \ \ \rightarrow$$

$$\ddot{s} \ = \ \frac{\ddot{S}}{\sqrt{m}} \ - \ \frac{\dot{S} \ \dot{m}}{m \ \sqrt{m}} \ - \ \frac{S \ \ddot{m}}{2 \ m \ \sqrt{m}} \ + \ \frac{3 \ S \ \dot{m}^2}{4 \ m^2 \ \sqrt{m}} \ . \qquad \text{(A.4.1.4c)}$$

Substituindo-se as expressões (A.4.1.4a-c) na expressão (A.4.1.3a), virá:

$$\frac{\ddot{S}}{\sqrt{m}} \ - \ \frac{\dot{S} \ \dot{m}}{m \ \sqrt{m}} \ - \ \frac{S \ \ddot{m}}{2 \ m \ \sqrt{m}} \ + \ \frac{3 \ S \ \dot{m}^2}{4 \ m^2 \ \sqrt{m}} \ +$$

$$+ \ \frac{\dot{m}}{m} \ (\frac{\dot{S}}{\sqrt{m}} \ - \ \frac{\dot{m} \ S}{2 \ m \ \sqrt{m}}) \ + \ \omega^2 \ \frac{S}{\sqrt{m}} \ =$$

$$= \ \ddot{S} \ - \ \frac{\dot{S} \ \dot{m}}{m} \ - \ \frac{S \ \ddot{m}}{2 \ m} \ + \ \frac{3 \ S \ \dot{m}^2}{4 \ m^2} \ + \ \frac{\dot{m} \ \dot{S}}{m} \ - \ \frac{S \ \dot{m}^2}{2 \ m^2} \ + \ \omega^2 \ S \ =$$

$$= \ \ddot{S} \ - \ S(\frac{\dot{m}^2}{4 \ m^2} \ - \ \frac{\ddot{m}}{2 \ m} \ + \ \omega^2) \ = \ 0 \quad \rightarrow$$

$$\ddot{S}(t) \ + \ \Omega^2(t) \ S(t) \ = \ 0 \ , \qquad \text{(A.4.1.5a)}$$

onde:

$$\Omega^2(t) \ = \ \frac{\dot{m}^2(t)}{4 \ m^2(t)} \ - \ \frac{\ddot{m}(t)}{2 \ m(t)} \ + \ \omega^2(t) \ . \qquad \text{(A.4.1.5b)}$$

Para resolvermos a equação diferencial representada pela expressão (A.4.1.5a), vamos considerar a seguinte solução:

$$S(t) \ = \ \rho(t) \ cos \ [\phi(t, \ t_o)] \ , \qquad \text{(A.4.1.6)}$$

com $\phi(t, \ t_o)$ definido por:

$$\phi(t, \ t_o) \ = \ \nu(t) \ - \ \nu(t_o) \ = \ \int_{t_o}^{t} \frac{dt'}{\rho^2(t')} \ , \qquad \text{(A.4.1.7a-b)}$$

$$\rho^2(t) \ \dot{\phi}(t) \ = \ \rho^2(t) \ \frac{d\phi}{dt} \ = \ 1 \ , \qquad \text{(A.4.1.7c)}$$

e $\rho(t)$ satisfaz a **equação de Pinney**,[9] ou seja:

$$\ddot{\rho}(t) \ + \ \omega^2(t) \ \rho(t) \ = \ \frac{1}{\rho^3(t)} \ . \qquad \text{(A.4.1.7d)}$$

Considerando-se os resultados acima, o **propagador de Feynman** para o lagrangiano representado pela expressão (A.4.1.1) será dado pela expressão (A.3.40). Assim, substituindo-se os superescritos (”) e (’), respectivamente, pelos subescritos (f) e (o), teremos:

$$K(x_f,\ x_o;\ t_f,\ t_o)\ =$$

$$=\ I\ exp\ [\tfrac{i}{\hbar}\ (J\ +\ K\ +\ L\ +\ M\ +\ N)]\ , \qquad (A.4.1.8)$$

onde:

$$I\ =\ [\frac{M_o}{2\ \pi\ i\ \hbar\ s_f\ s_o\ (\tau_f\ -\ \tau_o)}]^{1/2}\ , \qquad (A.4.1.9a)$$

$$J\ =\ \tfrac{1}{2}\ (a_f\ s_f\ \dot{s}_f\ \bar{x}_f^2\ -\ a_o\ s_o\ \dot{s}_o\ \bar{x}_o^2)\ , \qquad (A.4.1.9b)$$

$$K\ =\ (a_f\ s_f\ \dot{p}_f\ \bar{x}_f\ -\ a_o\ s_o\ \dot{p}_o\ \bar{x}_o)\ , \qquad (A.4.1.9c)$$

$$L\ =\ \tfrac{1}{2}\ (a_f\ p_f\ \dot{p}_f\ -\ a_o\ p_o\ \dot{p}_o)\ , \qquad (A.4.1.9d)$$

$$M\ =\ \tfrac{1}{2}\ \int_{t_o}^{t_f}\ D(t)\ p(t)\ dt\ , \qquad (A.4.1.9e)$$

$$N\ =\ \frac{M_o}{2\ (\tau_f\ -\ \tau_o)}\ (\bar{x}_f\ -\ \bar{x}_o)^2\ . \qquad (A.4.1.9f)$$

a) Cálculo de I.

Usando-se das expressões (A.3.6a,34a), (A.4.1.2a,e) e (A.4.1.4a,6,7a,c), resultará (é oportuno levar em consideração que $\int\ dt/cos^2\ \alpha\ =\ tg\ \alpha\ e\ tg\ 0^o\ =\ 0$):

$$\tau_f - \tau_o\ =\ \int_{t_o}^{t_f}\ \frac{M_o\ dt}{m\ s^2}\ =\ M_o \int_{t_o}^{t_f}\ \frac{dt}{S^2}\ =\ M_o \int_{t_o}^{t_f}\ \frac{dt}{\rho^2\ cos^2\ [\phi(t\ ,\ t_o)]}\ =$$

$$=\ M_o \int_{t_o}^{t_f}\ \frac{d\phi}{cos^2\ [\phi(t\ -\ t_o)]}\ =\ M_o\ tg\ [\phi(t\ ,\ t_o)]\ |_{t_o}^{t_f}\ =$$

$$=\ M_o\ \Big(\ tg\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]\ -\ tg\ [\phi(t_o\ ,\ t_o)]\ \Big)\ =$$

$$=\ M_o\ \Big(\ tg\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]\ -\ tg\ (0)\ \Big)\ \ \rightarrow$$

$$\tau_f \; - \; \tau_o \; = \; M_o \; tg \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; . \qquad (A.4.1.10)$$

Substituindo-se as expressões (A.4.1.4a,6,10) na expressão (A.4.1.9a), resultará [lembremos que $S_f \; = \; S(t_f)$, $S_o \; = \; S(t_o)$, $m_f \; = \; m(t_f)$, $m_o \; = \; m(t_o)$]:

$$I \; = \; \Big(\frac{M_o}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; \frac{S_f}{\sqrt{m_f}} \; \frac{S_o}{\sqrt{m_o}} \; M_o \; tg \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]} \Big)^{1/2} \; =$$

$$= \; \Big(\frac{1}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; \frac{\rho_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]}{\sqrt{m_f}} \; \frac{\rho_o \; [\phi(t_o \; , \; t_o)]}{\sqrt{m_o}} \; \frac{sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]}{cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]}} \Big)^{1/2} \; \to$$

$$I \; = \; \Big(\frac{1}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; \sigma_f \; \sigma_o \; sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]} \Big)^{1/2} \; , \qquad (A.4.1.11)$$

onde:

$$\sigma(t) \; = \; \frac{\rho(t)}{\sqrt{m(t)}} \; \to \; \rho^2(t) \; = \; m(t) \; \sigma^2(t), \qquad (A.4.1.12a\text{-}b)$$

$$\sigma_f \; = \; \sigma(t_f) \; , \qquad \sigma_o \; = \; \sigma(t_o) \; . \qquad (A.4.1.12c\text{-}d)$$

b) <u>Cálculo de J</u>.

Usando-se as expressões (A.3.5b), (A.4.1.2a-b), (A.4.1.3c,4a,6,7a,c,12a-d), teremos (deveremos lembrar que $sen \; 0^o \; = \; 0$, $cos \; 0^o \; = \; 1$):

$$s(t) \; = \; \frac{S(t)}{\sqrt{m(t)}} \; = \; \sigma(t) \; cos \; [\phi(t \; , \; t_o)] \; , \qquad (A.4.1.13a)$$

$$s(t_f) \; = \; s_f \; = \; \sigma_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; , \qquad (A.4.1.13b)$$

$$s(t_o) \; = \; s_o \; = \; \sigma_o \; cos \; [\phi(t_o \; , \; t_o)] \; = \; \sigma_o \; , \qquad (A.4.1.13c)$$

$$\dot{s}(t) \; = \; \dot{\sigma}(t) \; cos \; [\phi(t \; , \; t_o)] \; -$$

$$- \sigma(t) \; sen \; [\phi(t \; , \; t_o)] \; \dot{\phi} \; , \qquad (A.4.1.14a)$$

$$\dot{s}(t_f) \; = \; \dot{s}_f \; = \; \dot{\sigma}_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; - \; \sigma_f \; sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; \frac{1}{\rho_f^2} \; \rightarrow$$

$$\dot{s}_f \; = \; \dot{\sigma}_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; -$$

$$- \; \frac{1}{\sigma_f \; m_f} \; sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)], \qquad (A.4.1.14b)$$

$$\dot{s}(t_o) \; = \; \dot{s}_o \; = \; \dot{\sigma}_o \; cos \; [\phi(t_o \; , \; t_o)] \; -$$

$$- \; \sigma_o \; sen \; [\phi(t_o \; , \; t_o)] \; \frac{1}{\rho_o^2} \; = \; \dot{\sigma}_o \; , \qquad (A.4.1.14c)$$

$$\bar{x}(t) \; = \; \frac{1}{s(t)} \; [x(t) \; - \; p(t)] \; = \; \frac{1}{s(t)} \; [x(t) \; - \; s(t)] \; =$$

$$= \; \frac{x(t)}{s(t)} \; - \; 1 \; , \qquad (A.4.1.15a)$$

$$\bar{x}(t_f) \; = \; \bar{x}_f \; = \; \frac{x_f}{s_f} \; - \; 1 \; , \qquad (A.4.1.15b)$$

$$\bar{x}(t_o) \; = \; \bar{x}_o \; = \; \frac{x_o}{s_o} \; - \; 1 \; . \qquad (A.4.1.15c)$$

Tomando-se a expressão (A.4.1.9b) e inserindo-se nela as expressões (A.4.1.2a,13b-c,14b-c,15b-c), virá:

$$J \; = \; \frac{1}{2} \; \Big[\; m_f \; \sigma_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; \times$$

$$\times \; \Big(\; \dot{\sigma}_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; - \; \frac{1}{\sigma_f \; m_f} \; sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; \Big) \; \times$$

$$\times \; \Big(\; \frac{x_f^2}{\sigma_f^2 \; cos^2 \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]} \; - \; \frac{2 \; x_f}{\sigma_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]} \; + \; 1 \; \Big) \; -$$

$$- \; m_o \; \sigma_o \; \dot{\sigma}_o \; (\frac{x_o^2}{\sigma_o^2} \; - \; \frac{2 \; x_o}{\sigma_o} \; + \; 1) \; \Big] \; , \qquad (A.4.1.16)$$

$$J \;=\; J_1 \;+\; J_2 \;+\; J_3 \;+\; J_4 \;+\; J_5 \;+$$

$$+\; J_6 \;+\; J_7 \;+\; J_8 \;+\; J_9 \;, \qquad \text{(A.4.1.17a)}$$

onde:

$$J_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\; m_f \; \tfrac{\dot{\sigma}_f}{\sigma_f} \; x_f^2 \;, \qquad \text{(A.4.1.17b)}$$

$$J_2 \;=\; -\; m_f \; \dot{\sigma}_f \; cos\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \; x_f \;, \qquad \text{(A.4.1.17c)}$$

$$J_3 \;=\; \tfrac{1}{2}\; m_f \; \sigma_f \; \dot{\sigma}_f \; cos^2\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \;, \qquad \text{(A.4.1.17d)}$$

$$J_4 \;=\; -\; \tfrac{1}{2} \; \tfrac{tg\; [\phi(t_f \;,\; t_o)]}{\sigma_f^2} \; x_f^2 \;, \qquad \text{(A.4.1.17e)}$$

$$J_5 \;=\; \tfrac{sen\; [\phi(t_f \;,\; t_o)]}{\sigma_f} \; x_f \;, \qquad \text{(A.4.1.17f)}$$

$$J_6 \;=\; -\; \tfrac{1}{2}\; sen\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \; cos\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \;, \qquad \text{(A.4.1.17g)}$$

$$J_7 \;=\; -\; \tfrac{1}{2}\; m_o \; \tfrac{\dot{\sigma}_o}{\sigma_o} \; x_o^2 \;, \qquad J_8 \;=\; m_o \; \dot{\sigma}_o \; x_o \;, \qquad \text{(A.4.1.17h-i)}$$

$$J_9 \;=\; -\; \tfrac{1}{2}\; m_o \; \dot{\sigma}_o \; \sigma_o \;. \qquad \text{(A.4.1.17j)}$$

c) Cálculo de K.

Tomando-se a expressão (A.4.1.9c) e substituindo-se nela as expressões (A.4.1.2a-b,e-f,3c,13b-c,14b-c,15b-c), teremos:

$$K \;=\; m_f \; \sigma_f \; cos\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \;\times$$

$$\times \Big(\; \dot{\sigma}_f \; cos\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \;-\; \tfrac{1}{\sigma_f \; m_f} \; sen\; [\phi(t_f \;,\; t_o)] \; \Big) \;\times$$

$$\times \left(\frac{x_f}{\sigma_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]} \; - \; 1 \right) -$$

$$- \; m_o \; \sigma_o \; \dot{\sigma}_o \; (\frac{x_o}{\sigma_o} \; - \; 1) \; , \qquad (A.4.1.18)$$

$$K \; = \; K_1 \; + \; K_2 \; + \; K_3 \; + \; K_4 \; + \; K_5 \; + \; K_6 \; , \qquad (A.4.1.19a)$$

onde:

$$K_1 \; = \; m_f \; \dot{\sigma}_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; x_f \; , \qquad (A.4.1.19b)$$

$$K_2 \; = \; - \; m_f \; \sigma_f \; \dot{\sigma}_f \; cos^2 \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; , \qquad (A.4.1.19c)$$

$$K_3 \; = \; - \; \frac{sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]}{\sigma_f} \; x_f \; , \qquad (A.4.1.19d)$$

$$K_4 \; = \; sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; , \qquad (A.4.1.19e)$$

$$K_5 \; = \; - \; m_o \; \dot{\sigma}_o \; x_o \; , \qquad K_6 \; = \; m_o \; \sigma_o \; \dot{\sigma}_o \; . \qquad (A.4.1.19f\text{-}g)$$

d) <u>Cálculo de L</u>.

Considerando-se as expressões (A.4.1.2a,3c,13b-c) e (A.4.1.14b-c) e substituindo-se na expressão (A.4.1.9d), virá:

$$L \; = \; \frac{1}{2} \Big[\; m_f \; \sigma_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; \times$$

$$\times \left(\; \dot{\sigma}_f \; cos \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; - \; \frac{sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]}{\sigma_f \; m_f} \; \right) -$$

$$- \; m_o \; \sigma_o \; \dot{\sigma}_o \; \Big] \; = \; L_1 \; + \; L_2 \; + \; L_3 \; , \qquad (A.4.1.20)$$

onde:

$$L_1 \; = \; \frac{1}{2} \; m_f \; \sigma_f \; \dot{\sigma}_f \; cos^2 \; [\phi(t_f \; , \; t_o)] \; , \qquad (A.4.1.21a)$$

$$L_2 \;=\; -\,\tfrac{1}{2}\; cos\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]\; sen\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]\;, \qquad \text{(A.4.1.21b)}$$

$$L_3 \;=\; -\,\tfrac{1}{2}\; m_o\;\sigma_o\;\dot{\sigma}_o\;. \qquad \text{(A.4.1.21c)}$$

e) <u>Cálculo de M</u>.

Tomando-se a expressão (A.4.1.2d) e levando-se na expressão (A.4.1.9e), resultará:

$$M \;=\; \tfrac{1}{2}\int_{t_o}^{t_f} 0 \times p(t)\;dt \quad\rightarrow\quad M \;=\; 0\;. \qquad \text{(A.4.1.22)}$$

f) <u>Cálculo de N</u>.

Tomando-se as expressões (A.4.1.10,13b-c,15b-c) e substituindo-se na expressão (A.4.1.9f), obteremos:

$$N \;=\; \frac{M_o}{2\;M_o\;tg\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\left(\frac{x_f}{\sigma_f\;cos\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\;-\;1\;-\;\frac{x_o}{\sigma_o}\;+\;1\right)^2 \;=$$

$$=\;\frac{cos\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}{2\;sen[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\left(\frac{x_f^2}{\sigma_f^2\;cos^2\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\;-\right.$$

$$\left.-\;\frac{2\;x_f\;x_o}{\sigma_f\;\sigma_o\;cos\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\;+\;\frac{x_o^2}{\sigma_o^2}\right)\;, \qquad \text{(A.4.1.23)}$$

$$N \;=\; N_1\;+\;N_2\;+\;N_3\;, \qquad \text{(A.4.1.24a)}$$

onde:

$$N_1 \;=\; \frac{1}{2\;\sigma_f^2\;sen[\phi(t_f\;,\;t_o)]\;cos\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\;x_f^2\;, \qquad \text{(A.4.1.24b)}$$

$$N_2 \;=\; \frac{cos\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}{2\;\sigma_o^2\;sen\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\;x_o^2\;, \qquad \text{(A.4.1.24c)}$$

$$N_3 \;=\; -\;\frac{1}{\sigma_f\;\sigma_o\;sen\;[\phi(t_f\;,\;t_o)]}\;x_f\;x_o\;. \qquad \text{(A.4.1.24d)}$$

Antes de levarmos os resultados obtidos acima na expressão (A.4.1.8), vamos reduzir os termos semelhantes encontrados nesses mesmos resultados. Assim, teremos:

I. Termos em x_f^2 : $TXF2 = J_1 + J_4 + N_1$.

Usando-se as expressões (A.4.1.17b-e,24b), virá:

$$TXF2 = \Big(\tfrac{1}{2}\, m_f \, \frac{\dot{\sigma}_f}{\sigma_f} - \tfrac{1}{2}\, \frac{sen\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}{\sigma_f^2\ cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]} +$$

$$+ \frac{1}{2\ \sigma_f^2\ sen[\phi(t_f\ ,\ t_o)]\ cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]} \Big)\, x_f^2 =$$

$$= \Big(\tfrac{1}{2}\, m_f \, \frac{\dot{\sigma}_f}{\sigma_f} + \frac{1 - sen^2\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}{2\ \sigma_f^2\ sen[\phi(t_f\ ,\ t_o)]\ cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]} \Big)\, x_f^2 =$$

$$= \Big(\tfrac{1}{2}\, m_f \, \frac{\dot{\sigma}_f}{\sigma_f} + \frac{cos^2\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}{2\ \sigma_f^2\ sen[\phi(t_f\ ,\ t_o)]\ cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]} \Big)\, x_f^2 \quad \rightarrow$$

$$TXF2 = \Big(\tfrac{1}{2}\, m_f \, \frac{\dot{\sigma}_f}{\sigma_f} + \frac{cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}{2\ \sigma_f^2\ sen[\phi(t_f\ ,\ t_o)]} \Big)\, x_f^2 \,. \qquad \text{(A.4.1.25)}$$

II. Termos em x_o^2 : $TXO2 = J_7 + N_2$.

Usando-se as expressões (A.4.1.17h,24c), teremos:

$$TXO2 = \Big(- \tfrac{1}{2}\, m_o \, \frac{\dot{\sigma}_o}{\sigma_o} +$$

$$+ \frac{cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}{2\ \sigma_o^2\ sen\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]} \Big)\, x_o^2 \,. \qquad \text{(A.4.1.26)}$$

III. Termos em x_f : $TXF1 = J_2 + J_5 + K_1 +$
$+ K_3$.

Usando-se as expressões (A.4.1.17c,f,19b,d), resultará:

$$TXF1 = \Big(- m_f\ \dot{\sigma}_f\ cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)] + \frac{sen\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}{\sigma_f} +$$

$$+ \, m_f \, \dot{\sigma}_f \, cos \, [\phi(t_f \, , \, t_o)] \; - \; \frac{sen \, [\phi(t_f \, , \, t_o)]}{\sigma_f} \Big) \, x_f \quad \rightarrow$$

$$TXF1 \; = \; 0 \; . \qquad (A.4.1.27)$$

IV. Termos em x_o : $TXO1 \; = \; J_8 \; + \; K_5$.

Considerando-se as expressões (A.4.1.17i,19f), virá:

$$TXO1 \; = \; (m_o \, \dot{\sigma}_o \; - \; m_o \, \dot{\sigma}_o) \, x_o \quad \rightarrow$$

$$TXO1 \; = \; 0 \; . \qquad (A.4.1.28)$$

V. Termos em $x_f \, x_o$: $TXFO \; = \; N_3$.

Usando-se a expressão (A.4.1.24d), teremos:

$$TXFO \; = \; \Big(\; - \; \frac{1}{\sigma_f \; \sigma_o \; sen \; [\phi(t_f \; , \; t_o)]} \Big) \, x_f \, x_o \; . \qquad (A.4.1.29)$$

VI. Termos em σ_f : $TSF \; = \; J_3 \; + \; K_2 \; + \; L_1$.

Tomando-se as expressões (A.4.1.17d,19c,21a), obteremos:

$$TSF \; = \; \Big(\, \frac{1}{2} \, m_f \, cos^2 \, [\phi(t_f \, , \, t_o)] \; - \; m_f \, cos^2 \, [\phi(t_f \, , \, t_o)] \, +$$

$$+ \, \frac{1}{2} \, m_f \, cos^2 \, [\phi(t_f \, , \, t_o)] \Big) \, \sigma_f \, \dot{\sigma}_f \quad \rightarrow$$

$$TSF \; = \; 0 \; . \qquad (A.4.1.30)$$

VII. Termos em σ_o : $TSO \; = \; J_9 \; + \; K_6 \; + \; L_3$.

Usando-se as expressões (A.4.1.17j,19g,21c), virá:

$$TSO \; = \; (- \, \frac{1}{2} \, m_o \; + \; m_o \; - \; \frac{1}{2} \, m_o) \, \sigma_o \, \dot{\sigma}_o \quad \rightarrow$$

$$TSO \ = \ 0 \ . \qquad \text{(A.4.1.31)}$$

VIII. Termos independentes: $TI \ = \ J_6 \ + \ K_4 \ + \ L_2$.

Usando-se as expressões (A.4.1.17g,19e,21b), resultará:

$$TI \ = \ - \ \frac{1}{2} \ sen \ [\phi(t_f \ , \ t_o)] \ cos \ [\phi(t_f \ , \ t_o)] \ +$$

$$+ \ sen \ [\phi(t_f \ , \ t_o)] \ cos \ [\phi(t_f \ , \ t_o)] \ -$$

$$- \ \frac{1}{2} \ cos \ [\phi(t_f \ , \ t_o)] \ sen \ [\phi(t_f \ , \ t_o)] \quad \rightarrow$$

$$TI \ = \ 0 \ . \qquad \text{(A.4.1.32)}$$

Inserindo-se as expressões (A.4.1.11,25-32) na expressão (A.4.1.8), encontraremos o propagador desejado. Assim, teremos:

$$K(x_f, \ x_o; \ t_f, \ t_o) \ = \ \left(\frac{1}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ \sigma_f \ \sigma_o \ sen \ [\phi(t_f \ , \ t_o)]} \right)^{1/2} \ \times$$

$$\times \ exp \left(\frac{i}{\hbar} \ \left[\ \left(\ \frac{1}{2} \ m_f \ \frac{\dot{\sigma}_f}{\sigma_f} \ + \ \frac{cos \ [\phi(t_f, \ t_o)]}{2 \ \sigma_f^2 \ sen \ [\phi(t_f, \ t_o)]} \ \right) \ x_f^2 \ + \right. \right.$$

$$+ \left(\ - \ \frac{1}{2} \ m_o \ \frac{\dot{\sigma}_o}{\sigma_o} \ + \ \frac{cos \ [\phi(t_f, \ t_o)]}{2 \ \sigma_o^2 \ sen \ [\phi(t_f, \ t_o)]} \ \right) \ x_o^2 \ -$$

$$\left. \left. - \ \frac{x_f \ x_o}{\sigma_f \ \sigma_o \ sen \ [\phi(t_f, \ t_o)]} \ \right] \right) \quad \rightarrow$$

$$K(x_f, \ x_o; \ t_f, \ t_o) \ = \ \left(\frac{1}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ \sigma_f \ \sigma_o \ sen \ [\phi(t_f \ , \ t_o)]} \right)^{1/2} \ \times$$

$$\times \ exp \ [\frac{i}{2 \ \hbar} \ (\frac{m_f \ \dot{\sigma}_f}{\sigma_f} \ x_f^2 \ - \ \frac{m_o \ \dot{\sigma}_o}{\sigma_o} \ x_o^2)] \ \times$$

$$\times\ exp\ \Big[\ \frac{i}{2\ \hbar\ sen\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]}\ \times$$

$$\times\ \Big(\ (\frac{x_f^2}{\sigma_f^2}\ +\ \frac{x_o^2}{\sigma_o^2})\ cos\ [\phi(t_f\ ,\ t_o)]\ -\ \frac{2\ x_f\ x_o}{\sigma_f\ \sigma_o}\ \Big)\ \Big]\ , \qquad (A.4.1.33)$$

expressão que representa o mesmo resultado obtido por Nassar *et al.* (1986) e Cheng (1983,1985).[10]

A.4.2. Oscilador Harmônico Simples Unidimensional Independente do Tempo

Neste caso, o lagrangiano é dado por:

$$L\ =\ \frac{1}{2}\ m_o\ [\dot{x}^2\ -\ \omega_o^2\ x^2]\ . \qquad (A.4.2.1)$$

Comparando-se a expressão (A.4.2.1) com a expressão (A.2.21b), teremos:

$$a(t)\ =\ m_o\ , \qquad R_i\ =\ x\ , \qquad (A.4.2.2a\text{-}b)$$

$$\Omega_i\ =\ \omega_o\ , \qquad D_i\ =\ D\ =\ 0\ . \qquad (A.4.2.2c\text{-}d)$$

Substituindo-se a expressão (A.4.2.2c) na expressão (A.4.1.7d), resultará:

$$\ddot{\rho}(t)\ +\ \omega_o^2\ \rho(t)\ =\ \frac{1}{\rho^3(t)}\ . \qquad (A.4.2.3)$$

Considerando-se uma solução particular da **equação de Pinney**[11] acima, teremos:

$$\rho(t)\ =\ A\ \ \rightarrow\ \ \omega_o^2\ A\ =\ A^{-\ 3}\ \ \rightarrow$$

$$A\ =\ \omega_o^{-\ 1/2}\ , \qquad \rho\ =\ \omega_o^{-\ 1/2}\ . \qquad (A.4.2.4a\text{-}b)$$

Usando-se as expressões (A.4.2.2a,4b) nas expressões (A.4.1.7b,12a) poderemos escrever:

$$\phi(t_f,\ t_o)\ =\ \int_{t_o}^{t_f} \frac{dt}{\omega_o^{-\ 1}} \quad \rightarrow$$

$$\phi(t_f,\ t_o)\ =\ \omega_o\, T\ , \qquad T\ =\ t_f\ -\ t_o\ , \qquad \text{(A.4.2.5a-b)}$$

$$\sigma(t)\ =\ \frac{\omega_o^{-\ 1/2}}{\sqrt{m_o}}\ =\ \frac{1}{\sqrt{m_o\ \omega_o}} \quad \rightarrow$$

$$\sigma_f\ =\ \sigma_o\ =\ \frac{1}{\sqrt{m_o\ \omega_o}}\ , \qquad \dot{\sigma}_f\ =\ \dot{\sigma}_o\ =\ 0\ . \qquad \text{(A.4.2.6a-d)}$$

Inserindo-se as expressões (A.4.2.5a-b,6a-d) na expressão (A.4.1.33), teremos:

$$K(x_f,\ x_o;\ t_f,\ t_o)\ =\ \left[\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ \pi\ i\ \hbar\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \right]^{1/2}\ \times$$

$$\times\ exp\ \left(\ \frac{i\ m_o\ \omega_o}{2\ \hbar\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \times\right.$$

$$\left.\times[(x_f^2\ +\ x_o^2)\ cos\ (\omega_o\ T)\ -\ 2\ x_f\ x_o]\ \right)\ , \qquad \text{(A.4.2.7)}$$

expressão que representa o mesmo resultado obtido por Feynman e Hibbs (1965) [vide nota (4)].

A.4.3. Oscilador Harmônico Forçado Unidimensional Independente do Tempo

Neste caso, o lagrangiano é dado por:

$$L\ =\ \frac{1}{2}\ m_o\ [\dot{x}^2\ -\ \omega_o^2\ x^2]\ +\ f(t)\ x\ . \qquad \text{(A.4.3.1)}$$

Comparando-se a expressão (A.4.3.1) com as expressões (A.2.21b) e (A.3.5a), obteremos:

$$a(t)\ =\ m_o\ , \qquad R_i\ =\ x\ , \qquad \Omega_i\ =\ \omega_o\ , \qquad \text{(A.4.3.2a-c)}$$

$$D_i\ =\ f(t)\ , \qquad s_i\ =\ s(t)\ , \qquad p_i\ =\ p(t)\ . \qquad \text{(A.4.3.2d-f)}$$

Substituindo-se as expressões (A.4.3.2a-f) nas expressões (A.3.21,24), resultará:

$$\ddot{s}(t) \ + \ \omega_o^2 \ s(t) \ = \ 0 \ , \qquad (A.4.3.3)$$

$$\ddot{p}(t) \ + \ \omega_o^2 \ p(t) \ = \ \frac{f(t)}{m_o} \ . \qquad (A.4.3.4)$$

Analogamente ao caso (A.4.1.) e tendo em vista os resultados acima, o **propagador de Feynman** para o lagrangiano dado pela expressão (A.4.3.1) será dado pela expressão (A.3.40). Assim, substituindo-se os superescritos (") e ('), respectivamente, pelos subescritos (f) e (o), teremos:

$$K(x_f, \ x_o; \ t_f, \ t_o) \ =$$

$$= \ I \ exp \ [\frac{i}{\hbar} \ (J \ + \ K \ + \ L \ + \ M \ + \ N)] \ , \qquad (A.4.3.5)$$

onde:

$$I \ = \ [\frac{M_o}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ s_f \ \ s_o \ (\tau_f \ - \ \tau_o)}]^{1/2} \ , \qquad (A.4.3.6a)$$

$$J \ = \ \frac{1}{2} \ (a_f \ s_f \ \dot{s}_f \ \bar{x}_f^2 \ - \ a_o \ s_o \ \dot{s}_o \ \bar{x}_o^2) \ , \qquad (A.4.3.6b)$$

$$K \ = \ (a_f \ s_f \ \dot{p}_f \ \bar{x}_f \ - \ a_o \ s_o \ \dot{p}_o \ \bar{x}_o) \ , \qquad (A.4.3.6c)$$

$$L \ = \ \frac{1}{2} \ (a_f \ p_f \ \dot{p}_f \ - \ a_o \ p_o \ \dot{p}_o) \ , \qquad (A.4.3.6d)$$

$$M \ = \ \frac{1}{2} \ \int_{t_o}^{t_f} \ D(t) \ p(t) \ dt \ , \qquad (A.4.3.6e)$$

$$N \ = \ \frac{M_o}{2 \ (\tau_f \ - \ \tau_o)} \ (\bar{x}_f \ - \ \bar{x}_o)^2 \ . \qquad (A.4.3.6f)$$

a) Cálculo de I.

Para realizarmos esse cálculo, inicialmente resolveremos a equação diferencial dada pela expressão (A.4.3.3). Como se trata de uma equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes, é fácil ver que a sua solução será dada por:

$$s(t) \ = \ cos \ (\omega_o \ t) \ . \qquad \text{(A.4.3.7)}$$

Partindo-se das expressões (A.3.6a,34a), (A.4.3.2a,e) e (A.4.3.7), teremos [lembremos que $\int \ dt/cos^2 \ \alpha \ = \ tg \ \alpha$ e $sen \ (a \ - \ b) \ = \ sen \ a \ cos \ b \ - \ sen \ b \ cos \ a$]:

$$\tau_f \ - \ \tau_o \ = \ \int_{t_o}^{t_f} \frac{M_o \ dt}{m_o \ s^2} \ = \ \frac{M_o}{m_o} \int_{t_o}^{t_f} \frac{dt}{cos^2 \ (\omega_o \ t)} \ =$$

$$= \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} \ tg \ (\omega_o \ t) \ |_{t_o}^{t_f} \quad \rightarrow$$

$$\tau_f \ - \ \tau_o \ = \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} \ [tg \ (\omega_o \ t_f) \ - \ tg \ (\omega_o \ t_o)] \ =$$

$$= \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} \ [\frac{sen \ (\omega_o \ t_f)}{cos \ (\omega_o \ t_f)} \ - \ \frac{sen \ (\omega_o \ t_o)}{cos \ (\omega_o \ t_o)}] \ =$$

$$= \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} \ [\frac{sen \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ - \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_f)}{cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o)}] \ =$$

$$= \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} \ \left(\frac{sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t_o)]}{cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \right) \quad \rightarrow$$

$$\tau_f \ - \ \tau_o \ = \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} \ \frac{sen(\omega_o \ T)}{cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ , \qquad \text{(A.4.3.8a)}$$

$$T \ = \ t_f \ - \ t_o \ , \qquad \text{(A.4.3.8b)}$$

$$I = \Big(\frac{M_o}{2 \ \pi \ i \ \hbar \ cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ \frac{M_o}{\omega_o \ m_o} [\frac{sen(\omega_o \ T)}{cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o)}]} \Big)^{1/2} \ \rightarrow$$

$$I \;=\; \left[\frac{\omega_o \; m_o}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; sen \; (\omega_o \; T)} \right]^{1/2} . \qquad \text{(A.4.3.8c)}$$

b) <u>Cálculo de J</u>.

Usando-se as expressões (A.3.5b) e (A.4.3.2a-f,7), virá:

$$a(t_f) \;=\; a_f \;=\; a(t_o) \;=\; a_o \;=\; m_o \; , \qquad \text{(A.4.3.9a-b)}$$

$$s(t_f) \;=\; s_f \;=\; cos \; (\omega_o \; t_f) \; , \qquad \text{(A.4.3.10a)}$$

$$s(t_o) \;=\; s_o \;=\; cos \; (\omega_o \; t_o) \; , \qquad \text{(A.4.3.10b)}$$

$$\dot{s}(t) \;=\; - \; \omega_o \; sen \; (\omega_o \; t) \quad \rightarrow$$

$$\dot{s}(t_f) \;=\; \dot{s}_f \;=\; - \; \omega_o \; sen \; (\omega_o \; t_f) \; , \qquad \text{(A.4.3.11a)}$$

$$\dot{s}(t_o) \;=\; \dot{s}_o \;=\; - \; \omega_o \; sen \; (\omega_o \; t_o) \; , \qquad \text{(A.4.3.11b)}$$

$$\bar{x}(t) \;=\; \frac{1}{cos \; (\omega_o \; t)} \; [x(t) \; - \; p(t)] \quad \rightarrow$$

$$\bar{x}(t_f) \;=\; \bar{x}_f \;=\; \frac{1}{cos \; (\omega_o \; t_f)} \; [x(t_f) \; - \; p(t_f)] \;=$$

$$= \; \frac{1}{cos \; (\omega_o \; t_f)} \; (x_f \; - \; p_f) \; , \qquad \text{(A.4.3.12a)}$$

$$\bar{x}(t_o) \;=\; \bar{x}_o \;=\; \frac{1}{cos \; (\omega_o \; t_o)} \; [x(t_o) \; - \; p(t_o)] \;=$$

$$= \; \frac{1}{cos \; (\omega_o \; t_o)} \; (x_o \; - \; p_o) \; , \qquad \text{(A.4.3.12b)}$$

onde:

$$x(t_i) \;=\; x_i \; , \qquad p(t_i) \;=\; x_i \; . \quad (i \;=\; o, f) \qquad \text{(A.4.3.12c-d)}$$

Considerando-se a expressão (A.4.3.6b) e inserindo-se nela as expressões (A.4.3.2a,9a-b,10a-b,11a-b,12a-b), obteremos:

$$J = \frac{1}{2} \Big[m_o \, cos\,(\omega_o\, t_f)\,(-\,\omega_o)\, sen\,(\omega_o\, t_f) \times$$

$$\times \frac{1}{cos^2\,(\omega_o\, t_f)}\,(x_f - p_f)^2 -$$

$$-\, m_o \, cos\,(\omega_o\, t_o)\,(-\,\omega_o)\, sen\,(\omega_o\, t_o) \times$$

$$\times \frac{1}{cos^2\,(\omega_o\, t_o)}\,(x_o - p_o)^2 \Big] =$$

$$= -\,\frac{m_o\,\omega_o}{2} \Big[\frac{sen\,(\omega_o\, t_f)}{cos\,(\omega_o\, t_f)}\,(x_f^2 - 2\,x_f\,p_f + p_f^2) -$$

$$- \frac{sen\,(\omega_o\, t_o)}{cos\,(\omega_o\, t_o)}\,(x_o^2 - 2\,x_o\,p_o + p_o^2\,) \Big] \rightarrow$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6\,, \qquad \text{(A.4.3.13a)}$$

onde:

$$J_1 = -\,\frac{m_o\,\omega_o\,sen\,(\omega_o\,t_f)}{2\,cos\,(\omega_o\,t_f)}\,x_f^2\,, \qquad \text{(A.4.3.13b)}$$

$$J_2 = \frac{m_o\,\omega_o\,sen\,(\omega_o\,t_f)}{cos\,(\omega_o\,t_f)}\,x_f\,p_f\,, \qquad \text{(A.4.3.13c)}$$

$$J_3 = -\,\frac{m_o\,\omega_o\,sen\,(\omega_o\,t_f)}{2\,cos\,(\omega_o\,t_f)}\,p_f^2\,, \qquad \text{(A.4.3.13d)}$$

$$J_4 = \frac{m_o\,\omega_o\,sen\,(\omega_o\,t_o)}{2\,cos\,(\omega_o\,t_o)}\,x_o^2\,, \qquad \text{(A.4.3.13e)}$$

$$J_5 = -\,\frac{m_o\,\omega_o\,sen\,(\omega_o\,t_o)}{cos\,(\omega_o\,t_o)}\,x_o\,p_o\,, \qquad \text{(A.4.3.13f)}$$

$$J_6 \ = \ \frac{m_o \ \omega_o \ sen \ (\omega_o \ t_o)}{2 \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ p_o^2 \ . \qquad (A.4.3.13g)$$

c) Cálculo de K.

Para realizarmos esse cálculo, deveremos, antes de tudo, resolver a equação diferencial representada pela expressão (A.4.3.4). Como se trata de uma equação diferencial linear não-homogênea de coeficientes constantes, a sua solução será encontrada por intermédio das **funções de Green**. Desse modo, teremos:[12]

$$p(t) \ = \ \frac{1}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big[\ p_f \ sen \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ +$$

$$+ \ p_o \ sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ - \ \frac{1}{m_o \ \omega_o} \ \Big(\ sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ [(SF)_o(t) \ +$$

$$+ \ sen \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ [(SF)_f(t) \ \Big) \ \Big] \ , \qquad (A.4.3.14a)$$

$$(SF)_o(t) \ = \ \int_{t_o}^{t} \ sen \ [\omega_o \ (s \ - \ t_o)] \ f(s) \ ds \ , \qquad (A.4.3.14b)$$

$$(SF)_f(t) \ = \ \int_{t}^{t_f} \ sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ s)] \ f(s) \ ds \ , \qquad (A.4.3.14c)$$

$$\dot{p}(t) \ = \ \frac{\omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big[\ p_f \ cos \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ -$$

$$- \ p_o \ cos \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ + \ \frac{1}{m_o \ \omega_o} \ \Big(\ cos \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ [(SF)_o(t)] \ -$$

$$- \ cos \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ [(SF)_f(t)] \ \Big) \ \Big] \ , \qquad (A.4.3.14d)$$

$$\dot{p}(t_o) \ = \ \dot{p}_o \ = \ \frac{\omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big(\ p_f \ -$$

$$- \ p_o \ cos \ (\omega_o \ T) \ - \ \frac{[(SF)_f]}{m_o \ \omega_o} \ \Big) \ , \qquad (A.4.3.14e)$$

$$\dot{p}(t_f) \ = \ \dot{p}_f \ = \ \frac{\omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big(\ p_f \ cos \ (\omega_o \ T) \ -$$

$$- \ p_o \ + \ \frac{[(SF)_o]}{m_o \ \omega_o} \ \Big) \ , \qquad \text{(A.4.3.14f)}$$

onde:

$$(SF)_o \ = \ \int_{t_o}^{t_f} sen \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ f(t) \ dt \ , \qquad \text{(A.4.3.14g)}$$

$$(SF)_f \ = \ \int_{t_o}^{t_f} sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ f(t) \ dt \ , \qquad \text{(A.4.3.14h)}$$

$$p_o \ = \ p(t_o) \ , \qquad p_f \ = \ p(t_f) \ . \qquad \text{(A.4.3.14i-j)}$$

Tomando-se a expressão (A.4.3.6c) e levando-se nela as expressões (A.4.3.9a-b,10a-b,12a-b,14e-f), obteremos:

$$K \ = \ m_o \ cos \ (\omega_o \ t_f) \ \Big[\ \frac{\omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big(\ p_f \ cos \ (\omega_o \ T) \ - \ p_o \ +$$

$$+ \ \frac{[(SF)_o]}{m_o \ \omega_o} \ \Big) \ \Big] \ \frac{1}{cos \ (\omega_o \ t_f)} \ (x_f \ - \ p_f) \ -$$

$$- \ m_o \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ \Big[\ \frac{\omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big(\ p_f \ - \ p_o \ cos \ (\omega_o \ T) \ -$$

$$- \ \frac{[(SF)_f]}{m_o \ \omega_o} \ \Big) \ \Big] \ \frac{1}{cos \ (\omega_o \ t_o)} \ (x_o \ - \ p_o) \ ,$$

$$K \ = \ K_1 \ + \ K_2 \ + \ K_3 \ + \ K_4 \ + \ K_5 \ + \ K_6 \ +$$

$$+ \ K_7 \ + \ K_8 \ + \ K_9 \ + \ K_{10} \ + \ K_{11} \ + \ K_{12} \ , \qquad \text{(A.4.3.15a)}$$

com:

$$K_1 \ = \ m_o \ \omega_o \ \frac{cos \ (\omega_o \ T)}{sen \ (\omega_o \ T)} \ p_f \ x_f \ , \qquad \text{(A.4.3.15b)}$$

$$K_2 \;=\; -\, m_o\, \omega_o\, \frac{cos\ (\omega_o\ T)}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_f^2\ , \qquad (A.4.3.15c)$$

$$K_3 \;=\; -\, m_o\, \omega_o\, \frac{1}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_o\, x_f\ , \qquad (A.4.3.15d)$$

$$K_4 \;=\; m_o\, \omega_o\, \frac{1}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_o\, p_f\ , \qquad (A.4.3.15e)$$

$$K_5 \;=\; \frac{[(SF)_o]}{sen\ (\omega_o\ T)}\, x_f\ , \qquad (A.4.3.15f)$$

$$K_6 \;=\; -\, \frac{[(SF)_o]}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_f\ , \qquad (A.4.3.15g)$$

$$K_7 \;=\; -\, \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_f\ x_o\ , \qquad (A.4.3.15h)$$

$$K_8 \;=\; \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_f\ p_o\ , \qquad (A.4.3.15i)$$

$$K_9 \;=\; \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)}\, cos\ (\omega_o\ T)\ p_o\ x_o\ , \qquad (A.4.3.15j)$$

$$K_{10} \;=\; -\, \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)}\, cos\ (\omega_o\ T)\ p_o^2\ , \qquad (A.4.3.15k)$$

$$K_{11} \;=\; \frac{[(SF)_f]}{sen\ (\omega_o\ T)}\, x_o\ , \qquad (A.4.3.15l)$$

$$K_{12} \;=\; -\, \frac{[(SF)_f]}{sen\ (\omega_o\ T)}\, p_o\ . \qquad (A.4.3.15m)$$

d) Cálculo de L.

Para esse cálculo, tomaremos a expressão (A.4.3.6d) e inserirmos nela as expressões (A.4.3.9a-b,14e-f). Portanto, teremos:

$$L \;=\; \frac{1}{2}\, \Big[\, m_o\, p_f\, \frac{\omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)}\, \Big(\, p_f\ cos\ (\omega_o\ T)\ -\ p_o\ +\ \frac{[(SF)_o]}{m_o\ \omega_o}\, \Big)\ -$$

$$-\ \ m_o\ p_o\, \frac{\omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)}\, \Big(\, p_f\ -\ p_o\ cos\ (\omega_o\ T)\ -\ \frac{[(SF)_f]}{m_o\ \omega_o}\, \Big)\, \Big]\ ,$$

$$L \ = \ L_1 \ + \ L_2 \ + \ L_3 \ + \ L_4 \ + \ L_5 \ + \ L_6 \ , \qquad \text{(A.4.3.16a)}$$

em que:

$$L_1 \ = \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ cos \ (\omega_o \ T) \ p_f^2 \ , \qquad \text{(A.4.3.16b)}$$

$$L_2 \ = \ - \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ p_o \ p_f \ , \qquad \text{(A.4.3.16c)}$$

$$L_3 \ = \ \tfrac{[(SF)_o]}{2 \ sen \ (\omega_o \ T)} \ p_f \ , \qquad \text{(A.4.3.16d)}$$

$$L_4 \ = \ - \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ p_o \ p_f \ , \qquad \text{(A.4.3.16e)}$$

$$L_5 \ = \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ cos \ (\omega_o \ T) \ p_o^2 \ , \qquad \text{(A.4.3.16f)}$$

$$L_6 \ = \ \tfrac{[(SF)_f]}{2 \ sen \ (\omega_o \ T)} \ p_o \ . \qquad \text{(A.4.3.16g)}$$

e) <u>Cálculo de M</u>.

Para realizarmos esse cálculo, levaremos as expressões (A.4.3.2d,14a) na expressão (A.4.3.6e). Desse modo, teremos:

$$M \ = \ \tfrac{1}{2} \int_{t_o}^{t_f} \tfrac{f(t)}{sen \ (\omega_o \ T)} \ \Big[\ p_f \ sen \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ +$$

$$+ \ p_o \ sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ - \ \tfrac{1}{m_o \ \omega_o} \ \Big(\ sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t)] \ [(SF)_o(t)] \ +$$

$$+ \ sen \ [\omega_o \ (t \ - \ t_o)] \ [(SF)_f(t)] \ \Big) \ \Big] \ dt \ ,$$

$$M \ = \ M_1 \ + \ M_2 \ + \ M_3 \ + \ M_4 \ , \qquad \text{(A.4.3.17a)}$$

com [usar as expressões (A.4.3.14g-h)]:

$$M_1 \;=\; \frac{1}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ p_f \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t\ -\ t_o)]\ f(t)\ dt\ =$$

$$=\ \frac{[(SF)_o]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ p_f\ , \qquad \text{(A.4.3.17b)}$$

$$M_2 \;=\; \frac{1}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ p_o \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t)]\ f(t)\ dt\ =$$

$$=\ \frac{[(SF)_f]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ p_o\ , \qquad \text{(A.4.3.17c)}$$

$$M_3\ =\ -\ \frac{1}{2\ m_o\ \omega_o\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \times$$

$$\times \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t)]\ [(SF)_o(t)]\ f(t)\ dt\ , \qquad \text{(A.4.3.17d)}$$

$$M_4\ =\ -\ \frac{1}{2\ m_o\ \omega_o\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \times$$

$$\times \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t\ -\ t_o)]\ [(SF)_f(t)]\ f(t)\ dt\ . \qquad \text{(A.4.3.17e)}$$

f) Cálculo de N.

Usando-se as expressões (A.4.3.8a-b,12a-b) na expressão (A.4.3.6f), resultará:

$$N\ =\ \frac{M_o\ m_o\ \omega_o}{\frac{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ M_o}{cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}}\ [\frac{1}{cos\ (\omega_o\ t_f)}\ (x_f\ -\ p_f)\ -$$

$$-\ \frac{1}{cos\ (\omega_o\ t_o)}\ (x_o\ -\ p_o)]^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \Big[\ \frac{x_f^2\ -\ 2x_f\ p_f\ +\ p_f^2}{cos^2\ (\omega_o\ t_f)}\ +$$

$$+\ \frac{x_o^2\ -\ 2x_o\ p_o\ +\ p_o^2}{cos^2\ (\omega_o\ t_o)}\ -$$

$$-\ \frac{2\ (x_f\ x_o\ -\ x_f\ p_o\ -\ x_o\ p_f\ +\ p_f\ p_o)}{cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ \Big]\ ,$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 +$$

$$+ N_6 + N_7 + N_8 + N_9 + N_{10} \, , \qquad \text{(A.4.3.18a)}$$

com:

$$N_1 = \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_o)}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_f)} \ x_f^2 \, , \qquad \text{(A.4.3.18b)}$$

$$N_2 = - \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_o)}{sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_f)} \ x_f \ p_f \, , \qquad \text{(A.4.3.18c)}$$

$$N_3 = \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_o)}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_f)} \ p_f^2 \, , \qquad \text{(A.4.3.18d)}$$

$$N_4 = \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_f)}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ x_o^2 \, , \qquad \text{(A.4.3.18e)}$$

$$N_5 = - \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_f)}{sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ x_o \ p_o \, , \qquad \text{(A.4.3.18f)}$$

$$N_6 = \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_f)}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ p_o^2 \, , \qquad \text{(A.4.3.18g)}$$

$$N_7 = - \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ x_f \ x_o \, , \qquad \text{(A.4.3.18h)}$$

$$N_8 = \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ x_f \ p_o \, , \qquad \text{(A.4.3.18i)}$$

$$N_9 = \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ x_o \ p_f \, , \qquad \text{(A.4.3.18j)}$$

$$N_{10} = - \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T)} \ p_f \ p_o \, . \qquad \text{(A.4.3.18k)}$$

Antes de levarmos os resultados obtidos acima na expressão (A.4.3.5), vamos reduzir os termos semelhantes encontrados nesses mesmos resultados. Desse modo, obteremos

[lembraremos que $sen\ (a\ -\ b)\ =\ sen\ a\ cos\ b\ -\ sen\ b\ cos\ a$, $cos\ (a - b)\ =\ cos\ a\ cos\ b + sen\ a\ sen\ b,\ sen^2\ a + cos^2\ a\ =\ 1$]:

I. Termos em $x_f^2 :\ TXF2\ =\ J_1\ +\ N_1$.

Usando-se as expressões (A.4.3.8b,13b,18b), virá:

$$TXF2 = \Big(\ -\ \frac{m_o\ \omega_o\ sen\ (\omega_o\ t_f)}{2\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ +\ \frac{m_o\ \omega_o\ cos\ (\omega_o\ t_o)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ \Big)\ x_f^2\ =$$

$$= m_o\ \omega_o \Big(\frac{cos\ (\omega_o\ t_o)\ -\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen[\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\Big) x_f^2 =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ \Big(\ [cos\ (\omega_o\ t_o)\ -\ sen\ (\omega_o\ t_f)]\ \times$$

$$\times\ [sen\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ -\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)]\ \Big)\ x_f^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ \times$$

$$\times\ \Big[cos\ (\omega_o\ t_o)\ -\ sen^2\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ \Big]\ x_f^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ \times$$

$$\times\ \Big(cos\ (\omega_o\ t_o)\ [1\ -\ sen^2\ (\omega_o\ t_f)]\ +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ \Big)\ x_f^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ \times$$

$$\times\ \Big[\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ cos^2\ (\omega_o\ t_f)\ +$$

$$+ \ sen \ (\omega_o \ t_f) \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_f) \ \Big] \ x_f^2 \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ \omega_o}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_f)} \ \times$$

$$\times \ \Big(\ cos \ (\omega_o \ t_f) \ [cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ +$$

$$+ \ sen \ (\omega_o \ t_f) \ sen \ (\omega_o \ t_o)] \ \Big) \ x_f^2 \ =$$

$$= \ m_o \ \omega_o \ \Big(\ \frac{cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t_o)]}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_f)} \ \Big) \ x_f^2 \quad \rightarrow$$

$$TXF2 \ = \ \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ T)}{2 \ sen \ (\omega_o \ T)} \ x_f^2 \ . \qquad \text{(A.4.3.19)}$$

II. Termos em x_o^2 : $TXO2 \ = \ J_4 \ + \ N_4$.

Usando-se as expressões (A.4.3.8b,13e,18e), virá:

$$TXO2 \ = \ \Big(\ \frac{m_o \ \omega_o \ sen \ (\omega_o \ t_o)}{2 \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ + \ \frac{m_o \ \omega_o \ cos \ (\omega_o \ t_f)}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ \Big) \ x_o^2 \ =$$

$$= \ m_o \ \omega_o \ \Big(\ \frac{cos \ (\omega_o \ t_f) \ + \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ sen[\omega_o \ (t_f \ - \ t_o)]}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ \Big) \ x_o^2 \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ \omega_o}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ \Big(\ cos \ (\omega_o \ t_f) \ + \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ \times$$

$$\times \ [sen \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ - \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_f)] \ \Big) \ x_o^2 \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ \omega_o}{2 \ sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \ \Big(\ cos \ (\omega_o \ t_f) \ +$$

$$+ \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ sen \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ -$$

$$- \ sen^2 \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_f) \ \Big) \ x_o^2 \ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)} \Big(\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ [1\ -\ sen^2\ (\omega_o\ t_o)] +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ \Big)\ x_o^2\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)} \Big(\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos^2\ (\omega_o\ t_o) +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ \Big)\ x_o^2\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)} \Big(\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ [cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o) +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)]\ \Big)\ x_o^2\ =$$

$$=\ m_o\ \omega_o\ \Big(\ \frac{cos\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ \Big)\ x_o^2\ \ \rightarrow$$

$$TXF2\ =\ \frac{m_o\ \omega_o\ cos\ (\omega_o\ T)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ x_o^2\ . \qquad \text{(A.4.3.20)}$$

III. <u>Termos em $x_f\ x_o$: $TXFO\ =\ N_7$</u>.

Usando-se a expressão (A.4.3.18h), teremos:

$$TXFO\ =\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ (-\ 2\ x_f\ x_o)\ . \qquad \text{(A.4.3.21)}$$

IV. <u>Termos em $x_f\ p_f$: $TXFPF\ =\ J_2\ +\ K_1\ +\ N_2$</u>.

Usando-se as expressões (A.4.3.8b,13c,15b,18c), obteremos:

$$TXFPF\ =\ m_o\ \omega_o\ \Big(\ \frac{sen\ (\omega_o\ t_f)}{cos\ (\omega_o\ t_f)}\ +\ \frac{cos\ (\omega_o\ T)}{sen\ (\omega_o\ T)}\ -$$

$$-\ \frac{cos\ (\omega_o\ t_o)}{sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ \Big)\ x_f\ p_f\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big(\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]\ +$$

$$+\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]\ -\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ \Big)\ x_f\ p_f\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big(\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ [sen\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ -$$

$$-\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)]\ +$$

$$+\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ [cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)]\ -\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ \Big)\ x_f\ p_f\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big(\ sen^2\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ -$$

$$-\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ +$$

$$+\ cos^2\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ +$$

$$+\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ -\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ \Big)\ x_f\ p_f\ =$$

$$= m_o\ \omega_o \Big(\frac{cos\ (\omega_o\ t_o)[sen^2\ (\omega_o\ t_f)\ +\ cos^2\ (\omega_o\ t_f)]-\ cos\ (\omega_o\ t_o)}{sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big) x_f\ p_f \rightarrow$$

$$TXFPF\ =\ 0\ . \qquad (A.4.3.22)$$

V. Termos em $p_f^2 : TPF2 = J_3 + K_2 + L_1 + N_3$.

Usando-se as expressões (A.4.3.8b,13d,15c,16b,18d), teremos:

$$TPF2\ =\ m_o\,\omega_o \Big(\ -\ \frac{sen\ (\omega_o\ t_f)}{2\ cos\ (\omega_o\ t_f)}\ -\ \frac{cos\ (\omega_o\ T)}{sen\ (\omega_o\ T)}\ +\ \frac{cos\ (\omega_o\ T)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ +$$

$$+ \frac{cos\ (\omega_o\ t_o)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big)\ p_f^2\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big(\ cos\ (\omega_o\ t_o) -$$

$$- sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)] -$$

$$- cos\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ \Big)\ p_f^2\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big(\ cos\ (\omega_o\ t_o) -$$

$$- sen\ (\omega_o\ t_f)\ [sen\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o) -$$

$$- sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)] -$$

$$- cos\ (\omega_o\ t_f)\ [cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o) +$$

$$+ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)]\ \Big)\ p_f^2\ =$$

$$= \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big[\ cos\ (\omega_o\ t_o) -$$

$$- sen^2\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o) +$$

$$+ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f) -$$

$$- cos^2\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o) -$$

$$- sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ \Big]\ p_f^2\ =$$

$$= m_o\,\omega_o \Big(\frac{cos\ (\omega_o\ t_o)\ [1\ -\ sen^2\ (\omega_o\ t_f)]\ -\ cos^2\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_f)} \Big)\ p_f^2 \rightarrow$$

$$TPF2 \ = \ 0 \ . \qquad \text{(A.4.3.23)}$$

VI. Termos em $x_o \, p_o$: $TXOPO \ = \ J_5 \ + \ K_9 \ + \ N_5$.

Usando-se as expressões (A.4.3.8b,13f,15j,18f), virá:

$$TXOPO \ = \ m_o \, \omega_o \Big(\ - \ \frac{sen \ (\omega_o \ t_o)}{cos \ (\omega_o \ t_o)} \ + \ \frac{cos \ (\omega_o \ T)}{sen \ (\omega_o \ T)} \ -$$

$$- \ \frac{cos \ (\omega_o \ t_f)}{sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \Big) \ x_o \ p_o \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \Big(\ cos \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t_o)] \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ -$$

$$- \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ sen \ [\omega_o \ (t_f \ - \ t_o)] \ - \ cos \ (\omega_o \ t_f) \Big) \ x_o \ p_o \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \Big(\ cos \ (\omega_o \ t_o) \ \times$$

$$\times \ [cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ + \ sen \ (\omega_o \ t_f) \ sen \ (\omega_o \ t_o)] \ -$$

$$- \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ [sen \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ -$$

$$- \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_f)] \ - \ cos \ (\omega_o \ t_f) \Big) \ x_o \ p_o \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ \omega_o}{sen \ (\omega_o \ T) \ cos \ (\omega_o \ t_o)} \Big(\ cos \ (\omega_o \ t_f) \ cos^2 \ (\omega_o \ t_o) \ +$$

$$+ \ sen \ (\omega_o \ t_f) \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ +$$

$$- \ sen \ (\omega_o \ t_o) \ sen \ (\omega_o \ t_f) \ cos \ (\omega_o \ t_o) \ +$$

$$+ \ sen^2 \ (\omega_o \ t_o) \ cos \ (\omega_o \ t_f) \ - \ cos \ (\omega_o \ t_f) \Big) \ x_o \ p_o \ =$$

$$= m_o\, \omega_o \Big(\frac{cos\ (\omega_o\ t_f)[cos^2(\omega_o\ t_o)+sen^2\ (\omega_o\ t_o)]\ -\ cos\ (\omega_o\ t_f)}{sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)} \Big) x_o\, p_o \rightarrow$$

$$TXOPO\ =\ 0\ . \qquad \text{(A.4.3.24)}$$

VII. Termos em $p_o^2 : TPO2 = J_6 + K_{10} + L_5 + N_6$.

Usando-se as expressões (A.4.3.8b,13g,15k,16f,18g), resultará:

$$TPO2\ =\ m_o\, \omega_o \Big[\ \frac{sen\ (\omega_o\ t_o)}{2\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ -\ \frac{cos\ (\omega_o\ T)}{sen\ (\omega_o\ T)}\ +$$

$$+\ \frac{cos\ (\omega_o\ T)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ +\ \frac{cos\ (\omega_o\ t_f)}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ \Big]\ p_o^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ \Big(\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]\ -$$

$$-\ cos\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t_o)]\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ +\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ \Big)\ p_o^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ \Big(\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ \times$$

$$\times\ [sen\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ -$$

$$-\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)]\ -$$

$$-\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ [cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ +$$

$$+\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ sen\ (\omega_o\ t_o)]\ +\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ \Big)\ p_o^2\ =$$

$$=\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)\ cos\ (\omega_o\ t_o)}\ \Big[\ sen\ (\omega_o\ t_o)\ sen\ (\omega_o\ t_f)\ cos\ (\omega_o\ t_o)\ -$$

$$-\ sen^2\ (\omega_o\ t_o)\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ -\ cos\ (\omega_o\ t_f)\ cos^2\ (\omega_o\ t_o)\ -$$

$$- \; sen \; (\omega_o \; t_f) \; sen \; (\omega_o \; t_o) \; cos \; (\omega_o \; t_o) \; + \; cos \; (\omega_o \; t_f) \; \Big] \; p_o^2 \; =$$

$$= \; \frac{m_o \; \omega_o}{2 \; sen \; (\omega_o \; T) \; cos \; (\omega_o \; t_o)} \; \Big(\; - \; cos \; (\omega_o \; t_f) \; [sen^2 \; (\omega_o \; t_o) \; +$$

$$+ \; cos^2 \; (\omega_o \; t_o)] \; + \; cos \; (\omega_o \; t_f) \; \Big) \; p_o^2 \quad \rightarrow$$

$$TPO2 \; = \; 0 \; . \qquad \text{(A.4.3.25)}$$

VIII. Termos em $x_f \; p_o$: $TXFPO \; = \; K_3 \; + \; N_8$.

Usando-se as expressões (A.4.3.15d,18i), encontraremos:

$$TXFPO \; = \; m_o \; \omega_o \; \Big[\; \frac{-\;1}{sen \; (\omega_o \; T)} \; + \; \frac{1}{sen \; (\omega_o \; T)} \; \Big] \; x_f \; p_o \quad \rightarrow$$

$$TXFPO \; = \; 0 \; . \qquad \text{(A.4.3.26)}$$

IX. Termos em $p_f \; p_o$: $TPFPO \; = \; K_4 \; + \; K_8 \; +$
$+ \; L_2 \; + \; L_4 \; + \; N_{10}$.

Usando-se as expressões (A.4.3.15e,i,16c,e,18k), virá:

$$TXFPO \; = \; m_o \; \omega_o \; \Big(\frac{1}{sen \; (\omega_o \; T)} \; + \; \frac{1}{sen \; (\omega_o \; T)} \; - \; \frac{1}{2 \; sen \; (\omega_o \; T)} \; -$$

$$- \; \frac{1}{2 \; sen \; (\omega_o \; T)} \; - \; \frac{1}{sen \; (\omega_o \; T)} \; \Big) \; p_f \; p_o \quad \rightarrow$$

$$TXFPO \; = \; 0 \; . \qquad \text{(A.4.3.27)}$$

X. Termos em x_f : $TXF \; = \; K_5$.

Usando-se as expressões (A.4.3.14g,15f), teremos:

$$TXF \; = \; \frac{1}{sen \; (\omega_o \; T)} \; [(SF)_o] \; x_f \quad \rightarrow$$

$$TXF \;=\; \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)} \times$$

$$\times \left(\frac{2\ x_f}{m_o\ \omega_o} \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t\ -\ t_o)]\ f(t)\ dt \right) . \qquad \text{(A.4.3.28)}$$

XI. <u>Termos em p_f : $TPF \;=\; K_6 \;+\; L_3 \;+\; M_1$.</u>

Usando-se as expressões (A.4.3.15g,16d,17b), obteremos:

$$TPF \;=\; \left(-\ \frac{[(SF)_o]}{sen\ (\omega_o\ T)} \;+\; \frac{[(SF)_o]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)} \;+\; \frac{[(SF)_o]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)} \right) p_f \;\rightarrow$$

$$TPF \;=\; 0\ . \qquad \text{(A.4.3.29)}$$

XII. <u>Termos em $x_o\ p_f$: $TXOPF \;=\; K_7 \;+\; N_9$.</u>

Usando-se as expressões (A.4.3.15h,18j), resultará:

$$TXOPF \;=\; m_o\ \omega_o \left(-\ \frac{1}{sen\ (\omega_o\ T)} \;+\; \frac{1}{sen\ (\omega_o\ T)} \right) x_o\ p_f \quad \rightarrow$$

$$TXOPF \;=\; 0\ . \qquad \text{(A.4.3.30)}$$

XIII. <u>Termos em x_o : $TXO \;=\; K_{11}$.</u>

Usando-se as expressões (A.4.3.14h,15l), virá:

$$TXO \;=\; \frac{1}{sen\ (\omega_o\ T)}\ [(SF)_f]\ x_o \quad \rightarrow$$

$$TXO \;=\; \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)} \times$$

$$\times \left(\frac{2\ x_o}{m_o\ \omega_o} \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t)]\ f(t)\ dt \right) . \qquad \text{(A.4.3.31)}$$

XIV. <u>Termos em p_o : $TPO \;=\; K_{12} \;+\; L_6 \;+\; M_2$.</u>

Usando-se as expressões (A.4.3.15m,16g,17c), teremos:

$$TPO \;=\; \Big(\;-\; \frac{[(SF)_f]}{sen\ (\omega_o\ T)} \;+\; \frac{[(SF)_f]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)} \;+\; \frac{[(SF)_f]}{2\ sen\ (\omega_o\ T)} \Big)\ p_f \;\rightarrow$$

$$TPO \;=\; 0\ . \qquad \text{(A.4.3.32)}$$

XV. Termos Independentes: $TI \;=\; M_3 \;+\; M_4$.

Usando-se as expressões (A.4.3.14b-c,17d-e), encontraremos:

$$TI \;=\; -\; \frac{1}{2\ m_o\ \omega_o\ sen\ (\omega_o\ T)} \;\times$$

$$\times \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t_f \;-\; t)]\ [(SF)_o(t)]\ f(t)\ dt \;-$$

$$-\; \frac{1}{2\ m_o\ \omega_o\ sen\ (\omega_o\ T)} \int_{t_o}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t \;-\; t_o)]\ [(SF)_f(t)]\ f(t)\ dt \;=$$

$$=\; -\; \frac{1}{2\ m_o\ \omega_o\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \Big(\int_{t_o}^{t_f} \int_{t_o}^{t} sen\ [\omega_o\ (t_f \;-\; t)] \;\times$$

$$\times\ sen\ [\omega_o\ (s \;-\; t_o)]\ f(t)\ f(s)\ dt\ ds \;+$$

$$+\; \int_{t_o}^{t_f} \int_{t}^{t_f} sen\ [\omega_o\ (t \;-\; t_o)] \;\times$$

$$\times\ sen\ [\omega_o\ (t_f \;-\; s)]\ f(t)\ f(s)\ dt\ ds \Big)\ .$$

Como se pode demonstrar que as duas integrais indicadas acima são iguais,[12] resultará:

$$TI \;=\; \frac{m_o\ \omega_o}{2\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \Big(\;-\; \frac{2}{m_o^2\ \omega_o^2} \int_{t_o}^{t_f} \int_{t_o}^{t} sen\ [\omega_o\ (t_f \;-\; t)] \;\times$$

$$\times\ sen\ [\omega_o\ (s \;-\; t_o)]\ f(t)\ f(s)\ dt\ ds \Big)\ . \qquad \text{(A.4.3.33)}$$

Inserindo-se as expressões (A.4.3.8c) e (A.4.3.19-33) na expressão (A.4.3.5), encontraremos o propagador desejado. Assim, teremos:

$$K(x_f,\ x_o;\ t_f,\ t_o)\ =\ \left[\ \frac{m_o\ \omega_o}{2\ \pi\ i\ \hbar\ sen\ (\omega_o\ T)}\ \right]^{1/2}\ \times$$

$$\times\ exp\left(\ \frac{i\ m_o\ \omega_o}{2\ \hbar\ sen(\omega_o\ T)}\ \Big[\ (x_f^2\ +\ x_o^2)\ cos\ (\omega_o\ T)\ -\right.$$

$$-\ 2\ x_f\ x_o\ +\ \frac{2\ x_f}{m_o\ \omega_o}\ \int_{t_o}^{t_f}\ sen\ [\omega_o\ (t\ -\ t_o)]\ f(t)\ dt\ +$$

$$+\ \frac{2\ x_o}{m_o\ \omega_o}\ \int_{t_o}^{t_f}\ sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t)]\ f(t)\ dt\ -$$

$$-\ \frac{2}{m_o^2\ \omega_o^2}\ \int_{t_o}^{t_f}\ \int_{t_o}^{t}\ f(t)\ f(s)\ sen\ [\omega_o\ (t_f\ -\ t)]\ \times$$

$$\left.\times\ sen\ [\omega_o\ (s\ -\ t_o)]\ dt\ ds\ \Big]\ \right)\ , \qquad (A.4.3.34)$$

expressão essa que coincide com o valor obtido por Feynman e Hibbs (1965) [vide nota (4)].

A.4.4. Partícula em um Campo Externo Constante

Neste caso, o lagrangiano é dado por:

$$L\ =\ \frac{1}{2}\ m_o\ \dot{x}^2\ +\ f_o\ x\ . \qquad (A.4.4.1)$$

Comparando-se a expressão (A.4.4.1) com a expressão (A.2.21b), teremos:

$$a(t)\ =\ m_o\ , \qquad R_i\ =\ x\ , \qquad (A.4.4.2a\text{-}b)$$

$$\Omega_i\ =\ 0\ , \qquad D_i(t)\ =\ f_o\ . \qquad (A.4.4.2c\text{-}d)$$

Substituindo-se as expressões (A.4.4.2a-d) nas expressões (A.3.0.21,24), obteremos:

$$\ddot{s} = 0 \,, \qquad \ddot{p} \; = \; \frac{f_o}{m_o} \,. \qquad \text{(A.4.4.3a-b)}$$

Integrando-se as equações diferenciais acima e considerando-se as constantes de integração, a aditiva nula e a multiplicativa unitária, teremos:

$$s \; = \; t \,, \qquad \dot{s} \; = \; 1 \,, \qquad \text{(A.4.4.4a-b)}$$

$$p \; = \; \frac{f_o}{2 \; m_o} \; t^2 \,, \qquad \dot{p} \; = \; \frac{f_o \; t}{m_o} \,. \qquad \text{(A.4.4.4c-d)}$$

Usando-se os resultados acima, o **propagador de Feynman** para o lagrangiano dado pela expressão (A.4.4.1) será dado pela expressão (A.3.40). Assim, substituindo-se os superescritos (") e ('), respectivamente, pelos subescritos (f) e (o), teremos:

$$K(x_f, \; x_o; \; t_f, \; t_o) \; =$$

$$= \; I \; exp \, [\tfrac{i}{\hbar} \; (J \; + \; K \; + \; L \; + \; M \; + \; N)] \,, \qquad \text{(A.4.4.5)}$$

onde:

$$I \; = \; [\frac{M_o}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; s_f \; s_o \; (\tau_f \; - \; \tau_o)}]^{1/2} \,, \qquad \text{(A.4.4.6a)}$$

$$J \; = \; \frac{1}{2} \; (a_f \; s_f \; \dot{s}_f \; \bar{x}_f^2 \; - \; a_o \; s_o \; \dot{s}_o \; \bar{x}_o^2) \,, \qquad \text{(A.4.4.6b)}$$

$$K \; = \; (a_f \; s_f \; \dot{p}_f \; \bar{x}_f \; - \; a_o \; s_o \; \dot{p}_o \; \bar{x}_o) \,, \qquad \text{(A.4.4.6c)}$$

$$L \; = \; \frac{1}{2} \; (a_f \; p_f \; \dot{p}_f \; - \; a_o \; p_o \; \dot{p}_o) \,, \qquad \text{(A.4.4.6d)}$$

$$M \; = \; \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_f} D(t) \; p(t) \; dt \,, \qquad \text{(A.4.4.6e)}$$

$$N \; = \; \frac{M_o}{2 \; (\tau_f \; - \; \tau_o)} \; (\bar{x}_f \; - \; \bar{x}_o)^2 \,. \qquad \text{(A.4.4.6f)}$$

a) Cálculo de I.

Usando-se as expressões (A.3.6a,34a), (A.4.4.2a,4a), teremos (lembrar que $\int dt/t^2 = - t^{-1}$):

$$\tau_f - \tau_o = \int_{t_o}^{t_f} \frac{M_o \; dt}{m_o \; s^2} = \frac{M_o}{m_o} \int_{t_o}^{t_f} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \frac{M_o}{m_o} [- \tfrac{1}{t}] |_{t_o}^{t_f} = \frac{M_o}{m_o} (\tfrac{1}{t_o} - \tfrac{1}{t_f}) = \frac{M_o}{m_o} \frac{t_f - t_o}{t_f \; t_o} \rightarrow$$

$$\tau_f - \tau_o = \frac{M_o \; T}{m_o \; t_f \; t_o} , \qquad T = t_f - t_o , \qquad \text{(A.4.4.7a-b)}$$

$$I = \Big(\frac{M_o}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; t_o \; t_f \; \frac{M_o \; T}{m_o \; t_f \; t_o}} \Big)^{1/2} \rightarrow$$

$$I = \Big(\frac{m_o}{2 \; \pi \; i \; \hbar \; T} \Big)^{1/2} . \qquad \text{(A.4.4.7c)}$$

b) Cálculo de J.

Para esse cálculo, usemos as expressões (A.4.3.12a-b) e (A.4.4.2a-b,4a-c). Desse modo, virá:

$$a(t_f) = a_f = a(t_o) = a_o = m_o , \qquad \text{(A.4.4.8a-b)}$$

$$s(t_f) = s_f = t_f , \qquad s(t_o) = s_o = t_o , \qquad \text{(A.4.4.9a-b)}$$

$$\dot{s}(t) = 1 \rightarrow$$

$$\dot{s}(t_f) = \dot{s}_f = \dot{s}(t_o) = \dot{s}_o = 1 , \qquad \text{(A.4.4.10a-b)}$$

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{s(t)} [x(t) - p(t)] \rightarrow$$

$$\bar{x}(t_f) = \bar{x}_f = \frac{1}{t_f} [x(t_f) - p(t_f)] =$$

$$= \frac{1}{t_f}\ (x_f\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_f^2)\ , \qquad \text{(A.4.4.11a)}$$

$$\bar{x}(t_o)\ =\ \bar{x}_o\ =\ \frac{1}{t_o}\ [x(t_o)\ -\ p(t_o)]\ =$$

$$= \frac{1}{t_o}\ (x_o\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_o^2)\ . \qquad \text{(A.4.4.11b)}$$

Tomando-se a expressão (A.4.4.6b) e inserindo-se nela as expressões (A.4.4.8a-b,9a-b,10a-b,11a-b), obteremos:

$$J\ =\ \frac{1}{2}\ \Big(\ m_o\ t_f\ \times\ 1\ \times\ [\frac{1}{t_f}\ (x_f\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_f^2)^2]\ -$$

$$-\ m_o\ t_o\ \times\ 1\ \times\ [\frac{1}{t_o}\ (x_o\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_o^2)^2]\ =$$

$$=\ \frac{m_o}{2}\ \Big(\ t_f\ [\frac{1}{t_f^2}\ (x_f^2\ -\ \frac{f_o}{m_o}\ x_f\ t_f^2\ +\ \frac{f_o^2}{4\ m_o^2}\ t_f^4)]\ -$$

$$-\ t_o\ [\frac{1}{t_o^2}\ (x_o^2\ -\ \frac{f_o}{m_o}\ x_o\ t_o^2\ +\ \frac{f_o^2}{4\ m_o^2}\ t_o^4)]\ \Big)\ ,$$

$$J\ =\ J_1\ +\ J_2\ +\ J_3\ +\ J_4\ +\ J_5\ +\ J_6\ , \qquad \text{(A.4.4.12a)}$$

$$J_1\ =\ \frac{m_o}{2\ t_f}\ x_f^2\ , \qquad J_2\ =\ -\ \frac{1}{2}\ f_o\ x_f\ t_f\ , \qquad \text{(A.4.4.12b-c)}$$

$$J_3\ =\ \frac{f_o^2}{8\ m_o}\ t_f^3\ , \qquad J_4\ =\ -\ \frac{m_o}{2\ t_o}\ x_o^2\ , \qquad \text{(A.4.4.12d-e)}$$

$$J_5\ =\ \frac{1}{2}\ f_o\ x_o\ t_o\ , \qquad J_6\ =\ -\ \frac{f_o^2}{8\ m_o}\ t_o^3\ . \qquad \text{(A.4.4.12f-g)}$$

c) Cálculo de K.

Usando-se as expressões (A.4.4.4c-d), teremos:

$$p(t_f)\ =\ p_f\ =\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_f^2\ , \qquad \text{(A.4.4.13a)}$$

$$p(t_o) \; = \; p_o \; = \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_o^2 \; , \qquad (A.4.4.13b)$$

$$\dot{p}(t_f) \; = \; \dot{p}_f \; = \; \tfrac{f_o}{m_o} \; t_f \; , \qquad (A.4.4.13c)$$

$$\dot{p}(t_o) \; = \; \dot{p}_o \; = \; \tfrac{f_o}{m_o} \; t_o \; . \qquad (A.4.4.13d)$$

Considerando-se a expressão (A.4.4.6c) e substituindo-se nela as expressões (A.4.4.2a,8a-b,9a-b,11a-b,13c-d), virá:

$$K \; = \; m_o \; t_f \; \tfrac{f_o}{m_o} \; t_f \; [\tfrac{1}{t_f} \; (x_f \; - \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_f^2)] \; -$$

$$- \; m_o \; t_o \; \tfrac{f_o}{m_o} \; t_o \; [\tfrac{1}{t_o} \; (x_o \; - \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_o^2)] \; =$$

$$= \; f_o \; t_f \; (x_f \; - \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_f^2) \; - \; f_o \; t_o \; (x_o \; - \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_o^2) \; ,$$

$$K \; = \; K_1 \; + \; K_2 \; + \; K_3 \; + \; K_4 \; , \qquad (A.4.4.14a)$$

onde:

$$K_1 \; = \; f_o \; t_f \; x_f \; , \qquad K_2 \; = \; - \; \tfrac{f_o^2}{2\; m_o} \; t_f^3 \; , \qquad (A.4.4.14b\text{-}c)$$

$$K_3 \; = \; - \; f_o \; t_o \; x_o \; , \qquad K_4 \; = \; \tfrac{f_o^2}{2\; m_o} \; t_o^3 \; . \qquad (A.4.4.14d\text{-}e)$$

d) Cálculo de L.

Tomando-se a expressão (A.4.4.6d) e inserindo-se nela as expressões (A.4.4.8a-b) e (A.4.4.13a-d), resultará:

$$L \; = \; \tfrac{1}{2} \; (m_o \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_f^2 \; \tfrac{f_o}{m_o} \; t_f \; - \; m_o \; \tfrac{f_o}{2\; m_o} \; t_o^2 \; \tfrac{f_o}{m_o} \; t_o) \; ,$$

$$L \; = \; L_1 \; + \; L_2 \; . \qquad (A.4.4.15a)$$

sendo:

$$L_1 \;=\; \frac{f_o^2}{4\ m_o}\ t_f^3\ , \qquad L_2 \;=\; -\ \frac{f_o^2}{4\ m_o}\ t_o^3\ . \qquad \text{(A.4.4.15b-c)}$$

e) <u>Cálculo de M</u>.

Levando-se as expressões (A.4.4.2d,4c) na expressão (A.4.4.6e), teremos:

$$M \;=\; \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_f} f_o\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t^2\ dt \;=$$

$$=\; \frac{f_o^2}{12\ m_o}(t_f^3\ -\ t_o^3) \;=\; M_1\ +\ M_2\ , \qquad \text{(A.4.4.16a)}$$

onde:

$$M_1 \;=\; \frac{f_o^2}{12\ m_o}\ t_f^3\ , \qquad M_2 \;=\; -\ \frac{f_o^2}{12\ m_o}\ t_o^3\ . \qquad \text{(A.4.4.16b-c)}$$

f) <u>Cálculo de N</u>.

Substituindo-se as expressões (A.4.4.7a-b,11a-b) na expressão (A.4.4.6f), virá:

$$N \;=\; \frac{M_o}{2\ \frac{M_o\ T}{m_o\ t_o\ t_f}} \left[\ \frac{1}{t_f}\ (x_f\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_f^2)\ -\ \frac{1}{t_o}\ (x_o\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_o^2)\ \right]^2 \;=$$

$$=\; \frac{m_o\ t_o\ t_f}{2\ T} \left(\ \frac{x_f}{t_f}\ -\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_f\ -\ \frac{x_o}{t_o}\ +\ \frac{f_o}{2\ m_o}\ t_o\ \right)^2 \;=$$

$$=\; \frac{m_o\ t_o\ t_f}{2\ T} \left(\ \frac{x_f^2}{t_f^2}\ +\ \frac{f_o^2\ t_f^2}{4\ m_o^2}\ +\ \frac{x_o^2}{t_o^2}\ +\ \frac{f_o^2\ t_o^2}{4\ m_o^2}\ -\ \frac{f_o\ x_f}{m_o}\ -\ \frac{2\ x_f\ x_o}{t_f\ t_o}\ +\right.$$

$$\left.+\ \frac{f_o\ t_o\ x_f}{m_o\ t_f}\ +\ \frac{f_o\ t_f\ x_o}{m_o\ t_o}\ -\ \frac{f_o^2\ t_f\ t_o}{2\ m_o^2}\ -\ \frac{f_o\ x_o}{m_o}\ \right) \;=$$

$$=\; \frac{m_o\ t_o\ t_f}{2\ T} \left[\ \frac{x_f^2}{t_f^2}\ +\ \frac{f_o^2\ t_f^2}{4\ m_o^2}\ +\ \frac{x_o^2}{t_o^2}\ +\ \frac{f_o^2\ t_o^2}{4\ m_o^2}\ -\right.$$

$$- \ \frac{f_o \ x_f}{m_o} \ (\frac{t_f \ - \ t_o}{t_f}) \ - \ \frac{2 \ x_f \ x_o}{t_f \ t_o} \ +$$

$$+ \ \frac{f_o \ x_o}{m_o} \ (\frac{t_f \ - \ t_o}{t_o}) \ - \ \frac{f_o^2 \ t_f \ t_o}{2 \ m_o^2} \ \Big] \ =$$

$$= \ \frac{m_o \ t_o \ t_f}{2 \ T} \ \Big[\ \frac{x_f^2}{t_f^2} \ + \ \frac{f_o^2 \ t_f^2}{4 \ m_o^2} \ + \ \frac{x_o^2}{t_o^2} \ + \ \frac{f_o^2 \ t_o^2}{4 \ m_o^2} \ -$$

$$- \ \frac{f_o \ x_f}{m_o} \ \frac{T}{t_f} \ - \ \frac{2 \ x_f \ x_o}{t_f \ t_o} \ + \ \frac{f_o \ x_o}{m_o} \ \frac{T}{t_o} \ - \ \frac{f_o^2 \ t_f \ t_o}{2 \ m_o^2} \ \Big] \ ,$$

$$N \ = \ N_1 \ + \ N_2 \ + \ N_3 \ + \ N_4 \ +$$

$$+ \ N_5 \ + \ N_6 \ + \ N_7 \ + \ N_8 \ . \qquad \text{(A.4.4.17a)}$$

sendo que:

$$N_1 \ = \ \frac{m_o \ t_o}{2 \ T \ t_f} \ x_f^2 \ , \qquad N_2 \ = \ \frac{f_o^2 \ t_o}{8 \ m_o \ T} \ t_f^3 \ , \qquad \text{(A.4.4.17b-c)}$$

$$N_3 \ = \ \frac{m_o \ t_f}{2 \ T \ t_o} \ x_o^2 \ , \qquad N_4 \ = \ \frac{f_o^2 \ t_o^3}{8 \ m_o \ T} \ t_f \ , \qquad \text{(A.4.4.17d-e)}$$

$$N_5 \ = \ - \ \frac{f_o \ t_o}{2} \ x_f \ , \qquad N_6 \ = \ - \ \frac{m_o}{T} \ x_o \ x_f \ , \qquad \text{(A.4.4.17f-g)}$$

$$N_7 \ = \ \frac{f_o \ t_f}{2} \ x_o \ , \qquad N_8 \ = \ - \ \frac{f_o^2 \ t_o^2}{4 \ m_o \ T} \ t_f^2 \ . \qquad \text{(A.4.4.17h-i)}$$

Antes de levarmos os resultados obtidos acima na expressão (A.4.4.5), vamos reduzir os termos semelhantes encontrados nesses mesmos resultados. Assim, teremos:

I. Termos em x_f^2 : $TXF2 \ = \ J_1 \ + \ N_1$.

Usando-se as expressões (A.4.4.7b,12b,17b), virá:

$$TXF2 \ = \ [\frac{m_o}{2 \ t_f} \ + \ \frac{m_o \ t_o}{2 \ (t_f \ - \ t_o) \ t_f}] \ x_f^2 \ =$$

$$= [\frac{m_o}{2\ t_f}\ (1\ +\ \frac{t_o}{t_f\ -\ t_o})]\ x_f^2\ =\ [\frac{m_o}{2\ t_f}\ (\frac{t_f\ -\ t_o\ +\ t_o}{T})]\ x_f^2\ \ \rightarrow$$

$$TXF2\ =\ \frac{m_o}{2\ T}\ x_f^2\ . \qquad (A.4.4.18)$$

II. Termos em $x_o^2 :\ TXO2\ =\ J_4\ +\ N_3$.

Tomando-se as expressões (A.4.4.7b,12e,17d), resultará:

$$TXO2\ =\ [-\ \frac{m_o}{2\ t_o}\ +\ \frac{m_o\ t_f}{2\ (t_f\ -\ t_o)\ t_o}]\ x_o^2\ =$$

$$=\ [\frac{m_o}{2\ t_o}\ (-\ 1\ +\ \frac{t_f}{t_f\ -\ t_o})]\ x_o^2\ =\ [\frac{m_o}{2\ t_o}\ (\frac{-\ t_f\ +\ t_o\ +\ t_f}{T})]\ x_o^2\ \ \rightarrow$$

$$TXF2\ =\ \frac{m_o}{2\ T}\ x_o^2\ . \qquad (A.4.4.19)$$

III. Termos em $x_o\ x_f :\ TXOXF\ =\ N_6$.

Considerando-se a expressão (A.4.4.17g), virá:

$$TXOXF\ =\ \frac{m_o}{2\ T}\ (-\ 2\ x_o\ x_f)\ . \qquad (A.4.4.20)$$

IV. Termos em $x_f :\ TXF\ =\ J_2\ +\ K_1\ +\ N_5$.

Tomando-se as expressões (A.4.4.7b,12c,14b,17f), teremos:

$$TXF\ =\ (-\ \frac{1}{2}\ f_o\ t_f\ +\ f_o\ t_f\ -\ \frac{1}{2}\ f_o\ t_o)\ x_f\ =$$

$$=\ \frac{1}{2}\ f_o\ (t_f\ -\ t_o)\ x_f\ \ \rightarrow$$

$$TXF\ =\ \frac{1}{2}\ f_o\ T\ x_f\ . \qquad (A.4.4.21)$$

V. Termos em $x_o :\ TXO\ =\ J_5\ +\ K_3\ +\ N_7$.

Usando-se as expressões (A.4.4.7b,12f,14d,17h), virá:

$$TXO \;=\; (\tfrac{1}{2}\, f_o\, t_o - f_o\, t_o + \tfrac{1}{2}\, f_o\, t_f)\, x_o \;=\; \tfrac{1}{2}\, f_o\, (t_f - t_o)\, x_o \;\rightarrow$$

$$TXF \;=\; \tfrac{1}{2}\, f_o\, T\, x_o\,. \qquad \text{(A.4.4.22)}$$

VI. <u>Termos Independentes: $TI = J_3 + J_6 + K_2 + K_4 + L_1 + L_2 + M_1 + M_2 + N_2 + N_4 + N_8$.</u>

Usando-se as expressões (A.4.4.7b,12d,g,14c,e,15b-c) e (A.4.4.16b-c,17c,e,i), virá:

$$TI \;=\; \frac{t_f^3\; f_o^2}{8\; m_o} - \frac{t_o^3\; f_o^2}{8\; m_o} - \frac{t_f^3\; f_o^2}{2\; m_o} + \frac{t_o^3\; f_o^2}{2\; m_o} + \frac{t_f^3\; f_o^2}{4\; m_o} - \frac{t_o^3\; f_o^2}{4\; m_o} +$$

$$+ \frac{t_f^3\; f_o^2}{12\; m_o} - \frac{t_o^3\; f_o^2}{12\; m_o} + \frac{t_o\; t_f^3\; f_o^2}{8\; m_o\; T} + \frac{t_f\; t_o^3\; f_o^2}{8\; m_o\; T} - \frac{t_o^2\; t_f^2\; f_o^2}{4\; m_o\; T} \;=$$

$$= \; f_o^2 \left(\frac{3\; t_f^3 \,-\, 3\; t_o^3 \,-\, 12\; t_f^3 \,+\, 12\; t_o^3 \,+\, 6\; t_f^3 \,-\, 6\; t_o^3 \,+\, 2\; t_f^3 \,-\, 2\; t_o^3}{24\; m_o} \,+\right.$$

$$\left. + \frac{t_o\; t_f^3 \,+\, t_o^3\; t_f \,-\, 2\; t_o^2\; t_f^2}{8\; m_o\; T} \right) \;=$$

$$= \; \frac{f_o^2}{m_o} \left(\frac{-\, f_f^3 \,+\, t_o^3}{24} + \frac{t_o\; t_f^3 \,+\, t_o^3\; t_f \,-\, 2\; t_o^2\; t_f^2}{8\; T} \right) \;=$$

$$= \; \frac{f_o^2}{m_o} \left[\frac{(t_o^3 \,-\, t_f^3)(t_f \,-\, t_o) \,+\, 3(t_o\; t_f^3 \,+\, t_o^3\; t_f \,-\, 2\; t_o^2\; t_f^2)}{24\; T} \right] \;=$$

$$= \; \frac{f_o^2}{24\; m_o\; T} \Big(t_o^3\, t_f \;-\; t_o^4 \;-\; t_f^4 \;+\; t_f^3\, t_o \;+\; 3\, t_o\, t_f^3 \;+$$

$$+\, 3\, t_o^3\, t_f \;-\; 6\, t_o^2\, t_f^2 \Big) \rightarrow$$

$$TI \;=\; -\, \frac{f_o^2}{24\; m_o\; T} \Big(t_f^4 \;+\; t_o^4 \;-\; 4\, t_o^3\, t_f \;-$$

$$-\, 4\, t_f^3\, t_o \;+\; 6\, t_o^2\, t_f^2 \Big)\,. \qquad \text{(A.4.4.23a)}$$

Partindo-se da expressão (A.4.4.7b), poderemos escrever que:

$$T^4 = (t_f - t_o)^4 = (t_f^2 + t_o^2 - 2\, t_f\, t_o)^2 =$$

$$= (t_f^2 + t_o^2)^2 + 4\, t_f^2\, t_o^2 - 4\, (t_f^2 + t_o^2)\, t_f\, t_o =$$

$$= t_f^4 + t_o^4 + 2\, t_f^2\, t_o^2 + 4\, t_f^2\, t_o^2 - 4\, t_f^3\, t_o - 4\, t_f\, t_o^3 \quad \rightarrow$$

$$T^4 = t_f^4 + t_o^4 - 4\, t_o^3\, t_f - 4\, t_f^3\, t_o + 6\, t_o^2\, t_f^2\, . \quad \text{(A.4.4.23b)}$$

Substituindo-se a expressão (A.4.4.23b) na expressão (A.4.4.23a), teremos:

$$TI = -\frac{f_o^2\, T^4}{24\, m_o\, T} = -\frac{f_o^2\, T^3}{24\, m_o}\, . \qquad \text{(A.4.4.24)}$$

Considerando-se a expressão (A.4.4.5) e inserindo-se nela as expressões (A.4.4.7c,18-22,24), encontraremos o propagador desejado. Assim, teremos:

$$K(x_f,\, x_o;\, t_f,\, t_o) = \left(\frac{m_o}{2\, \pi\, i\, \hbar\, T} \right)^{1/2} \times$$

$$\times\, exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m_o}{2\, T}\, (x_f^2 + x_o^2 - 2\, x_o\, x_f + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\, f_o\, T\, (x_f + x_o) - \frac{f_o^2\, T^3}{24\, m_o} \right] \right) \quad \rightarrow$$

$$K(x_f,\, x_o;\, t_f,\, t_o) = \left(\frac{m_o}{2\, \pi\, i\, \hbar\, T} \right)^{1/2} \times$$

$$\times\, exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m_o}{2\, T}\, (x_f^2 - x_o^2)^2 + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{2} f_o T (x_f + x_o) - \frac{f_o^2 T^3}{24 m_o}] \Big) , \quad \text{(A.4.4.25)}$$

expressão essa que coincide com o valor obtido por Feynman e Hibbs (1965) [vide nota (4)].

A.4.5. Partícula Livre

Neste caso, o lagrangiano é dado por:

$$L = \frac{1}{2} m_o \dot{x}^2 . \quad \text{(A.4.5.1)}$$

Comparando-se a expressão (A.4.5.1) com a expressão (A.4.4.1), verifica-se que para obter o propagador procurado, isto é, da partícula livre, bastará considerar $f_o = 0$ na expressão (A.4.4.25). Deste modo, obteremos:

$$K(x_f, x_o; t_f, t_o) = \left(\frac{m_o}{2 \pi i \hbar T} \right)^{1/2} \times$$

$$\times exp [\frac{i m_o}{2 \hbar T} (x_f - x_o)^2] , \quad \text{(A.4.5.2)}$$

expressão essa que coincide com a expressão (A.3.0.38b).

NOTAS E REFERÊNCIAS

1. KHANDEKAR, D. C. and LAWANDE, S. V. 1986. *Physics Reports 137*, 116; NASSAR, A. B., BOTELHO, L. C. L., BASSALO, J. M. F. and ALENCAR, P. T. S. 1990. *Physica Scripta 42*, 9.

2. DUTRA, A. S. and CHENG, B. K. 1989. *Physical Review A39*, 5897.

3. GOLDSTEIN, H. 1959. **Classical Mechanics**, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

4. FEYNMAN, R. P. and HIBBS, A. R. 1965. **Quantum Mechanics and Path Integrals**, McGraw-Hill Book Company; SCHULMAN, L. S. 1981. **Techniques and Applications of Path Integrals**, John Wiley; GROSCHE, C. and STEINER, F. (Editors) 1998. **Handbook of Feynman Path Integrals**, Springer-Verlag.

5. BASSALO, J. M. F. e ALENCAR, P. T. S. 1992. *Revista Brasiliera de Ensino de Física 14*, 16; —— 1993. *Revista Brasileira de Ensino de Física 15*, 28; BASSALO, J. M. F. 1995. *Il Nuovo Cimento B110*, 23; ——. 1996. *Il Nuovo Cimento B111*, 793; BASSALO, J. M. F., ALENCAR, P. T. S. and CATTANI, M. S. D. 1998. *Il Nuovo Cimento B113*, 691.

6. MERZBACHER, E. 1961. **Quantum Mechanics**, John Wiley and Sons (Toppan).

7. BURGAN, J. R., GUTIERREZ, J., MUNIER, A., FIJAZKOW, E. and FEIX, M. R. 1979 *Physics Letters A74*, 11; RAY, J. R. and REID, J. L. 1981. *Journal of Mathematical Physics 38*, 91.

8. FARINA DE SOUZA, C. and DUTRA, A. S. 1987. *Physics Letters A123*, 297.

9. PINNEY, E. 1950. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **1**: 681.

10. NASSAR, A. B., BASSALO, J. M. F. and ALENCAR, P. T. S. 1986. *Physics Letters 113A*, 365; CHENG, B. K. 1983. *Revista Brasileira de Física 13*, 220; —— 1985. *Physics Letters 113A*, 293.

11. BASSALO, J. M. F. 1991. **Essay in Honour of Jayme Tiomno: Frontier Physics**, World Scientific, 99.

12. BYRON, F. and FULLER, R. W. 1970. **Mathematics of Classical and Quantum Physics**. Addison-Wesley Publishing Company; BASSALO, J. M. F. 1998. **Métodos da Física Teórica IV**. DFUFPA (mimeo).

ÍNDICE ONOMÁSTICO

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Z

R

S

T

V

W

Z

José Maria Filardo Bassalo

Paulo de Tarso Santos Alencar

Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Antônio Boulhosa Nassar

Mauro Sérgio Dorsa Cattani nasceu em Pompéia, Estado de São Paulo, no dia 29 de maio de 1942. Em 1963, bacharelou-se em Física pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (FFCLUSP). Em 1965, participou da criação de um grupo de Geofísica em Salvador, Bahia, no Departamento de Física da Universidade Federal da Bahia, graduação. No período de 1966-1968, esteve no Instituto de Física da Universidade de Pisa desenvolvendo sua tese de doutoramento. Obteve os títulos de **Doutor** em Física em setembro de 1968 e de **Livre Docência** em setembro de 1969, ambos no Departamento de Física da FFCLUSP. Em 1970, participou da criação de um Grupo de Astrofísica no Instituto de Física (IFUSP). No ano de 1972, fez seu pós-doutoramento no Laboratório de Infra-Vermelho em Orsay, França. Em 1972, foi promovido a **Professor Adjunto**. Em 1974, participou da criação de um Grupo de Plasmas que deu origem ao primeiro Tokamak (TBr 1) brasileiro. Em 1977, foi eleito Membro Titular da Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Em 1985, tornou-se Professor Titular do Departamento de Física Geral e Experimental do IFUSP. Foi Editor Associado da revista *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* de 1982 a 1993. É *referee* do *Physical Review* e tem cerca de 110 trabalhos publicados em revistas de âmbito internacional, orientou 5 doutoramentos e 7 mestrados. Publicou em 1990 o livro **Elementos de Mecânica dos Fluidos** pela Editora Edgard Blücher Ltda. e em 2000 o livro *Aspectos Contemporâneos da Física pela EDUFPA*, em colaboração com José Maria Filardo Bassalo e Antônio Boulhosa Nassar. Tem vários artigos de divulgação científica publicados no jornal *O Estado de São Paulo*.

Paulo de Tarso Santos Alencar nasceu em Belém do Pará, em 10 de março de 1940. Em 1964 e 1966, respectivamente, bacharelou-se e licenciou-se em Matemática pelo antigo **Núcleo de Física e Matemática da UFPA**; em 1975, obteve o título de **Mestre em Física** pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro; em 1977, recebeu o título de **Livre Docente (Doutor)** da UFPA. Em 1966, ingressou como **Instrutor de Ensino no Núcleo de Física e Matemática** e, em 1978, tornou-se Professor Adjunto da UFPA, cargo em que se aposentou em 1991. Em 1997, prestou novo concurso para Professor Adjunto da UFPA, cargo em que permanece até o presente momento. É autor de 14 artigos científicos publicados no Brasil e no exterior.

José Maria Filardo Bassalo nasceu em Belém do Pará, em 10 de setembro de 1935. Em 1958, formou-se em Engenharia Civil pela antiga Escola de Engenharia do Pará; em 1965, recebeu o título de Bacharel em Física pela Universidade de Brasília; em 1973 e 1975, respectivamente, obteve os títulos de **Mestre e Doutor** em Física pela Universidade de São Paulo. Em 1961, ingressou como **Instrutor de Ensino** no então Núcleo de Física e Matemática da UFPA; em 1978 e 1989, tornou-se, respectivamente, **Professor Adjunto** e **Professor Titular** do Departamento de Física da UFPA, ocupando este cargo até o presente momento. Neste Departamento, desenvolve trabalhos de ensino, pesquisa e divulgação da Física, com os seguintes resultados: 9 teses de mestrado orientadas e co-orientadas; 11 trabalhos de Conclusão de Curso orientados; 35 trabalhos científicos publicados no Brasil e no exterior; 156 trabalhos sobre a História da Física divulgados em revistas nacionais e internacionais; colaborador dos seguintes jornais: *O Liberal*, *A Província do Pará*, *Diário do Pará*, de Belém; *Jornal da Ciência*, do Rio de Janeiro. É autor dos seguintes livros (editados pela UFPA): **Introdução à Mecânica dos Meios Contínuos** (1973); **Aspectos Contemporâneos da Física** (2000), com Antônio Boulhosa Nassar e Mauro Sérgio Dorsa Cattani; **Crônicas da Física**: Tomos 1 (1987); 2 (1990); 3 (1992); 4 (1994); 5 (1998); 6 (2002); **Nascimentos da Física (3.500 a.C. 1900 a.D.)** (1996); **Nascimentos da Física (1901-1950)** (2000).

Antônio Boulhosa Nassar nasceu em Belém do Pará, em 31 de março de 1953. Em 1978, formou-se em Engenharia Eletrônica pela Universidade Federal do Pará; em 1980, obteve o título de **Mestre em Física** pela Universidade de Campinas (Unicamp); em 1983 e 1990, respectivamente, obteve os títulos de **Mestre e Ph.D.** em Física pela Universidade da Califórnia, Los Angeles (UCLA). Em 1989, tornou-se Professor de Física da Harvard-Westlake School e em 1993 tornou-se Professor de Física da UCLA, no programa de extensão. Em 1979, tornou-se Professor Assistente pelo Departamento de Engenharia Elétrica da UFPA, e em 1999 tornou-se **Professor Adjunto** pelo Departamento de Física. Neste Departamento, tem desenvolvido trabalho de ensino e pesquisa, com o seguinte resultado: 8 teses de mestrado orientadas; 40 trabalhos científicos publicados no exterior; árbitro (referee) de 2 trabalhos científicos para o *Journal of Mathematical Physics*, 1 *para a Physics Letters*, 5 *trabalhos para o Physical Review* A, 8 *trabalhos para o Physics Review Letters*.